Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Sommer 2021

Helmholtz-Hörsaal
Freitag, den 13. 08. 2021
Beginn: 15.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Abgabe: ________

Studiengang: ____________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	13	17	10	23		63
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1 **13 Punkte**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(1) = x_0 \in \mathbb{R}$$

mit der Lösung

$$x(t) = (t-2)^3 \quad \text{für} \quad t \geq 1\,.$$

a) Bestimmen Sie den Anfangswert x_0, die Funktion $f(x)$ und die Ruhelage x_R.

Hinweis: Falls Sie a) nicht lösen können, verwenden sie in den folgenden Aufgaben $f(x) = 5x^{4/5}$.

b) Bestimmen Sie das maximale r^*, für das die Lösung für $t \geq 1$ in $B = \{x \in \mathbb{R} |\; \|x - x_0\| \leq r\}$ mit $r < r^*$ eindeutig ist.

c) Bestimmen Sie eine Lösung $y = y(t)$ für das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = f(y(t))$, $y(4) = 1$.

d) Zeichnen Sie (qualitativ) die Graphen der Lösungen $x(t)$ und $y(t)$.

e) Geben Sie zwei Lösungen $z_1 \not\equiv z_2$ an, die das Anfangswertproblem $\dot{z}(t) = f(z(t))$, $z(1) = -1$ lösen.

f) Ist die Ruhelage x_R asymptotisch stabil? Begründen Sie.

Aufgabe 2

17 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a - x_1^2\\ -x_2\end{pmatrix}$$

mit dem Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$ sowie dem konstanten Parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Ruhelagen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

b) Verwenden Sie die indirekte Methode von Lyapunov zur Charakterisierung der Stabilitätseigenschaften der in a) bestimmten Ruhelagen. Handelt es sich jeweils um Strudel-, Knoten-, Sattel- oder Wirbelpunkte?

Im weiteren sei nun $a = 1$.

c) Berechnen Sie die Eigenvektoren um die vorhandenen Ruhelagen. Existieren in dem System Separatrizen? Erläutern Sie, wie Sie mit den Eigenvektoren eine Separatrix bestimmen können. Geben Sie den Einzugsbereich $\mathcal{E}$ bezüglich jeder Ruhelage an.

d) Tragen Sie im Phasenportrait aus Abbildung 1 die folgenden Strukturen (falls vorhanden) ein:

(i) alle Ruhelagen,

(ii) die Eigenvektoren um die jeweilige Ruhelage,

(iii) das Richtungsfeld für $x_2 = 0$,

(iv) die Separatrizen mit Richtungspfeilen,

(v) die Verlängerung der angedeuteten Phasenlinien (gestrichelte Linien) mit Richtungen.

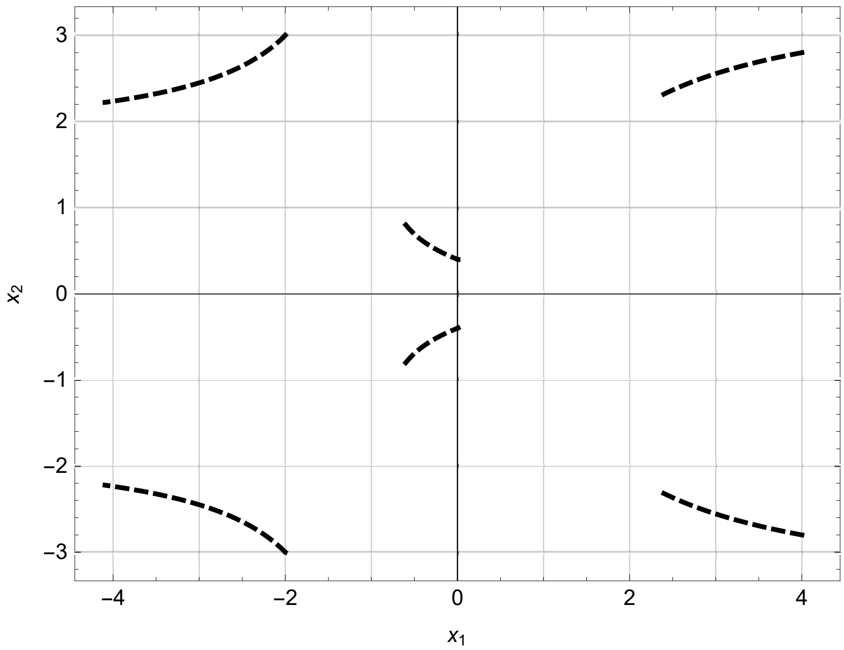

Abbildung 1: Platz zum Skizzieren der Strukturen im Phasenportrait aus Aufgabenteil (d)

Aufgabe 3 **10 Punkte**

Betrachten Sie folgendes System

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\,u,$$

das mit einem Regler der Form

$$u = -k\,R^{-1}(x)G^\top(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^\top$$

mit $k > 0$ geregelt wird. Dabei ist V eine stetig differenzierbare, positiv definite Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathrm{R}$, welche Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + q(x) - \frac{1}{4}\frac{\partial V}{\partial x} G(x)R^{-1}(x)G^\top(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^\top = 0 \quad \text{(Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung)}$$

ist. Die Matrix $R(x)$ ist positiv definit.

Verwenden Sie nun $V = V(x)$ als Kandidat für eine Lyapunov-Funktion.

a) Zeigen Sie, dass der Ursprung des Systems asymptotisch stabil ist, wenn die Funktion $q = q(x)$ positiv definit ist und für $k \geq 1/4$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass der Ursprung des Systems asymptotisch stabil ist, wenn die Funktion $q = q(x)$ positiv semidefinit ist, für $k > 1/4$ gilt und darüber hinaus die einzige Lösung von $\dot{x} = f(x)$, die identisch in der Menge aller x mit $q(x) = 0$ verbleibt, die triviale Lösung $x \equiv 0$ ist.

c) Geben Sie zusätzliche Bedingungen an, so dass der Ursprung global asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 4

23 Punkte

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 - 4x_1 + 4x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ 4x_2^3 - 16x_2 + 5x_1^2 x_2 - 16x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 3x_2 \\ 2 + 3x_1 \end{pmatrix} u$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$. Zunächst soll das freie System mit $u \equiv 0$ betrachtet werden.

a) Untersuchen Sie mit Lyapunovs indirekter Methode die Stabilität des Betriebspunkts $x_\mathrm{R} = 0$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, dass die Ruhelage asymptotisch stabil ist. Zeichnen Sie in der x_1-x_2-Ebene die Menge $\mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \dot{V} = 0\}$ und $\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \dot{V} \leq 0\}$.

Hinweis: $$(px_1 + qx_2)^2(x_1^2 + x_2^2 + r) = px_1^4 + p^2 r x_1^2 + 2pqx_1x_2(x_1^2 + x_2^2) + q^2x_2^4 + q^2 r x_2^2 \\ +(p^2 + q^2)x_1^2x_2^2 + 2pqrx_1x_2$$

Nachfolgend soll ein $\mathcal{L}_g V$-Regler eingesetzt werden.

c) Berechnen Sie einen $\mathcal{L}_g V$-Regler mit Verstärkung $K \in \mathbb{R}$ und geben Sie die Ableitung $\dot{V}$ der Lyapunov-Funktion V des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit der Verstärkung K an.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion für den geschlossenen Regelkreis die Menge $\mathcal{E}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \dot{V} \leq 0\}$ in Abhängigkeit der Verstärkung K. Für welche K vergrößert der $\mathcal{L}_g V$-Regler die Menge $\mathcal{E}_2$ im Vergleich zur Menge $\mathcal{E}_1$.

e) Wie groß muss K mindestens gewählt werden, damit der geschlossene Regelkreis mit Anfangswert $x_0 = (5 \;\; 0)^\top$ asymptotisch in den Ursprung konvergiert?