Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Winter 2021/2022

Leonardo-da-Vinci-Hörsaal 1
Dienstag, den 22. 03. 2022
Beginn: 13.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	18	17	9	16		60
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

18 Punkte

Gegeben seien folgende Systeme

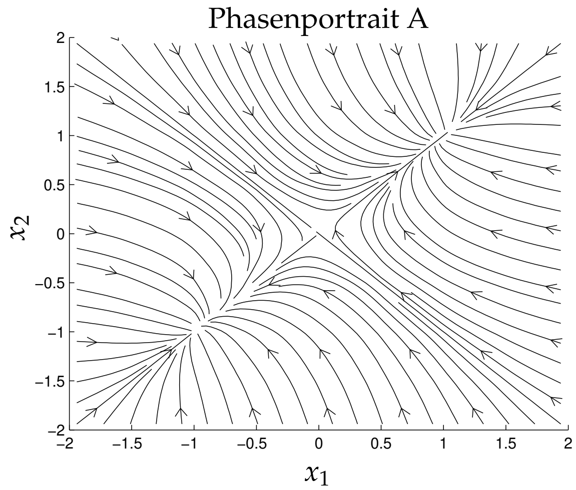
$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_1 - 1 \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 4x_1 + 3 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

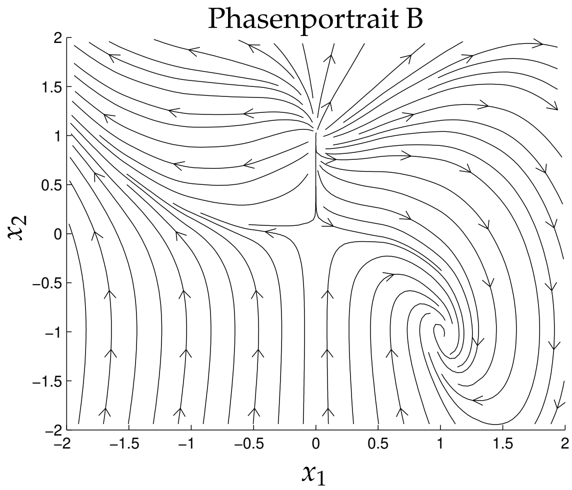
$$\Sigma_3 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + e^{x_1} - 1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{cases} \qquad \Sigma_4 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen der vier Systeme.

b) Beurteilen Sie die Stabilität der Ruhelagen mit der indirekten Methode von Lyapunov.

c) Nachstehend sind Phasenportraits zu zwei der oben genannten Systeme gegeben.





Ordnen Sie zu und begründen Sie. Zeichnen Sie die Ruhelagen ein.

d) Geben Sie für alle Systeme aus Teilaufgabe a) den Einzugsbereich der Ruhelagen an.
Hinweis: Überlegen Sie welche Rolle die Separatrix spielt. Eine Rechnung ist nicht notwendig.

Aufgabe 2

17 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x_1) + 2|x_2|, & x_1(0) = x_{1,0} \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{4}\operatorname{sign}(x_2) - \operatorname{sign}(x_1)x_2, & x_2(0) = x_{2,0} \end{cases}$$

und die Funktion

$$V = \left(\tfrac{1}{2}|x_1| + |x_2|\right)^2.$$

Es gilt

$$\frac{\partial |y|}{\partial y} = \operatorname{sign}(y) \quad \text{für } y \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{sign}(y) = \begin{cases} 1, & \text{für } y > 0, \\ -1, & \text{für } y < 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen von Σ.

b) Prüfen Sie das Anfangswertproblem Σ auf Existenz und Eindeutigkeit von (stückweise) stetig differenzierbaren Lösungen.

c) Zeigen Sie, dass $x_1(t) = -\frac{1}{2}t + 2$, $x_2 \equiv 0$ das Anfangswertproblem Σ für $x_{1,0} = 2$, $x_{2,0} = 0$ im Intervall $t \in [0, 4)$ löst.

d) Eignet sich V als Kandidat für eine Lyapunov-Funktion? (Begründung)

e) Zeigen Sie, dass $\dot{V} = -\sqrt{V}$ für alle $x_1, x_2 \neq 0$ gilt.

f) Zeigen Sie, dass $\dot{V} = -\frac{1}{2}\sqrt{V}$ für alle $x_1 \neq 0$, $x_2 \equiv 0$ gilt.

g) Bestimmen Sie eine Lösung $W(t)$, $t \geq 0$ für das Anfangswertproblem $\dot{W} = -c\sqrt{W}$, $0 < c \in \mathbb{R}$ mit $W(0) = \left(\frac{1}{2}|x_{1,0}| + |x_{2,0}|\right)^2$.

h) Bestimmen Sie $T = T(x_0)$ so, dass $W(T) = 0$ gilt und geben sie eine obere Schranke $\overline{T}(x_0)$ und eine untere Schranke $\underline{T}(x_0)$ für die Konvergenzzeit der Lösung von Σ an.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass $x_{1,0}$, $x_{2,0} \neq 0$ und eine eindeutige Lösung existiert.

Aufgabe 3

9 Punkte

Gegeben sei das zeitvariante System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(t)x_1 - x_2\end{aligned}$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion g, welche für ein $k > 0$ und alle $t \geq 0$ die Beziehungen

$$0 \leq g(t) \leq k \qquad \text{und} \qquad \dot{g}(t) \leq g(t)$$

erfüllt.

a) Zeigen mit Hilfe von $V(x,t) = (1 + g(t))x_1^2 + x_2^2$ als Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion, dass der Ursprung gleichmäßig asymptotisch stabil ist.

b) Ist der Ursprung auch global gleichmäßig asymptotisch stabil? (Begründung)

Aufgabe 4

16 Punkte

Gegeben sind die folgenden Bewegungsdifferentialgleichungen eines Roboters:

$$\ddot{q}_1 + 2(\ddot{q}_1 + \cos(q_2)\ddot{q}_2) = u_1 + 2\sin(q_2)\dot{q}_2^2$$
$$2(\ddot{q}_2 + \cos(q_2)\ddot{q}_1) + 2G\sin(q_2) = \beta u_2$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$, $G > 0$ und den generalisierten Koordinaten $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie das Differentialgleichungssystem in Form der Robotikgleichung

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B\,u$$

dar und geben Sie die Terme D, C, g sowie die Eingangsmatrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an.

b) Zeigen Sie, dass $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$ schiefsymmetrisch ist.

c) Geben Sie das Regelgesetz für einen PD-Festwertregler zur Stabilisierung des Ursprungs in Abhängigkeit von β an. Begründen Sie, warum dieser für $\beta = 0$ nicht eingesetzt werden kann.

Im Folgenden ist der zweite Aktuator ausgefallen ($\beta = 0$).

d) Geben Sie ein PID-Folgeregelungsgesetz $u_1 = u_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, q_1^*, \dot{q}_1^*, \ddot{q}_1^*)$ an, welches den Folgeregelfehler $e_1 = q_1 - q_1^*(t)$ asymptotisch zu null ausregelt. Welche Ansprüche müssen an die Solltrajektorie q_1^* gestellt werden, damit das Stellsignal u_1 nicht springt?

Hinweis: Eliminieren Sie $\ddot{q}_2$ und stellen Sie die Gleichungen zunächst nach $\ddot{q}_1$ um.

e) Gegeben seien $e_1 \equiv 0$ und die konstante Geschwindigkeitsreferenz $q_1^*(t) = 2t, \dot{q}_1^*(t) = 2\,\forall t \geq 0$. Nutzen Sie für die verbleibende Dynamik mit $|q_2| < \pi$ den Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion

$$V(q_2, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + G\big(1 - \cos(q_2)\big),$$

um die lokale Stabilität des Betriebspunkts $q_2 = 0$ im geschlossenen Regelkreis nachzuweisen.