Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Sommer 2022

Helmholtz-Hörsaal
Donnerstag, den 11. 08. 2022
Beginn: 10.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Studiengang: ____________________

Abgabe: ________

Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	9	13	15	12		49
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

9 Punkte

Gegeben sei das folgende System mit $a = 0,08$ und $b = 0,6$

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + a\,x_2 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = b - a\,x_2 - x_1^2 x_2 \end{cases}$$

und die vier Mengen

$\mathcal{D}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 < 9 \right\}$,

$\mathcal{D}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| -(x_1 - x_2)^2 < 1 + a \right\}$,

$\mathcal{D}_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| x_1 > 0,\ x_2 < \frac{1}{4} x_1 \right\}$,

$\mathcal{D}_4 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| 0,25 < (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 < 9 \right\}$.

a) Können jeweils Grenzzyklen auf den gegebenen Mengen $\mathcal{D}_i$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ mit dem Bendixson-Kriterium ausgeschlossen werden?

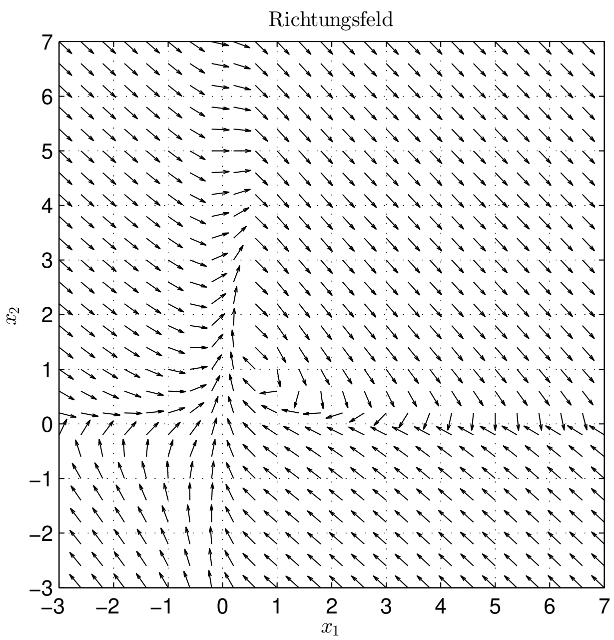
b) Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems.

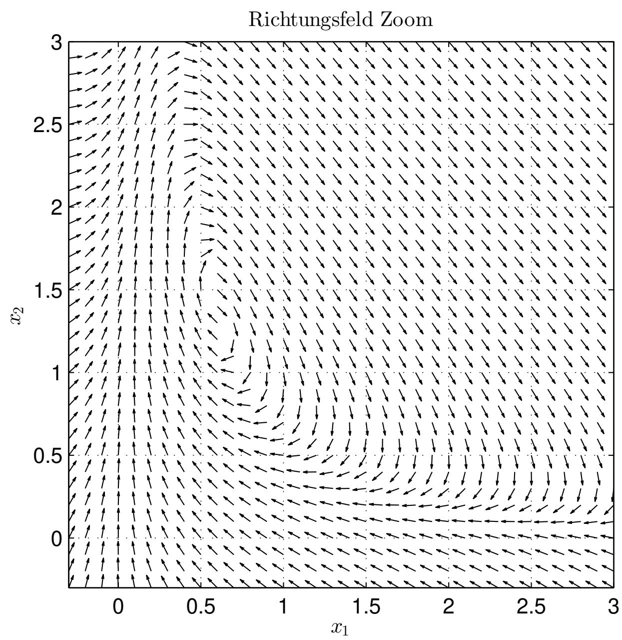
Gegeben sei das untenstehende Richtungsfeld sowie eine Vergrößerung eines Teilbereichs.

c) Zeichnen Sie alle Mengen $\mathcal{D}_i$ qualitativ in eine der untenstehenden Grafiken ein.

d) Zeichnen Sie die Ruhelagen in beide Grafiken qualitativ ein. Welche Aussage können Sie anhand der Grafik über die Stabilität machen?

e) Zeichnen Sie qualitativ in die Grafik *Richtungsfeld* eine positiv invariante Menge $\mathcal{M}$ ein. Welche Aussage können Sie über die Existenz von Grenzzyklen treffen?





Aufgabe 2 **13 Punkte**

Gegeben ist das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2 + 10x_1^3x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1^2x_2 - \left(x_1^2 + 1\right)(2x_1 - u)\end{aligned}$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Stabilität des Ursprungs $\bar{x} = 0$ für das freie System ($u \equiv 0$) mit Lyapunovs indirekter Methode.

b) Nutzen Sie $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^4$ als Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion und berechnen Sie $\dot{V}$, d.h. deren Ableitung entlang der Lösung, in Abhängigkeit von x und u.

c) Entwerfen Sie mittels $\dot{V}$ ein Regelgesetz $u = u(x_1)$ so, dass $\dot{V}$ negativ (semi-)definit ist.

   Hinweis: Kompensieren Sie in $\dot{V}$ mit u Zustände mit ungeraden Exponenten.

d) Geben Sie $\dot{V}$ für das geregelte System an. Für welche Zustände x gilt $\dot{V} = 0$?

e) Geben Sie die größte positiv invariante Teilmenge für $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^2 | \dot{V} = 0\}$ an. Kann das entworfene Regelgesetz die Ruhelage $\bar{x} = 0$ asymptotisch stabilisieren?

f) Geben Sie den Einzugsbereich an, für den die Ruhelage $\bar{x} = 0$ stabilisiert wird.

Aufgabe 3

15 Punkte

Betrachten Sie das nichtlineare System erster Ordnung

$$\dot{x} = -\theta\, x^3 + u$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$. Der konstante Parameter $\theta \in \mathbb{R}$ sei unbekannt.

a) Bestimmen Sie zunächst unter der Annahme, θ sei bekannt, ein Regelgesetz $u = u(x)$, das dem geschlossenen Regelkreis eine asymptotisch stabile Ruhelage bei $\bar{x} = 0$ verleiht. Geben Sie hierfür eine strikte Lyapunov-Funktion $V = V(x)$ an.

b) Sei $\hat{\theta}$ nun eine Schätzzustand für den unbekannten Parameter θ. Berechnen Sie mit Hilfe des Ansatzes $V_\theta(x, \theta) = V(x) + \frac{1}{2}(\hat{\theta} - \theta)^2$ einen adaptiven Regler, der $\bar{x} = 0$ für beliebige θ global asymptotisch stabilisiert.

   Hinweis: Für den Stabilitätsbeweis können Sie das Lemma von Barbălat verwenden.

c) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t\to\infty} \hat{\theta}(t)$ existiert.

Aufgabe 4

12 Punkte

Wir betrachten das System Σ mit der Darstellung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1 x_2^3 - x_1 \\ x_1^4 x_2^2 - x_2^3 - x_2 + (x_1 - 1)u \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $x(t) \in \mathbb{R}^2$ der Zustand und $u(t) \in \mathbb{R}$ der Eingang. Zudem betrachten wir die quadratische Lyapunov-Funktion $V(x) = \frac{1}{2}x^\top x$.

a) Zeigen Sie, dass der Ursprung $x_R = 0$ des freien Systems $(u = 0)$ lokal asymptotisch stabil ist.

b) Bestimmen Sie für die Lyapunov-Funktion V die Ableitung entlang der Lösung, d.h. $\dot{V}$.

Im folgenden soll Sontags Universalregler

$$u_{\mathrm{Son}}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\mathcal{L}_f V(x) + \sqrt{(\mathcal{L}_f V(x))^2 + (\mathcal{L}_g V(x))^4}}{\mathcal{L}_g V(x)} & , \quad \mathcal{L}_g V(x) \neq 0 \\ 0 & , \quad \mathcal{L}_g V(x) = 0 \end{cases}$$

mit Hilfe der Lyapunov-Funktion V entworfen werden.

c) Geben Sie die Menge $\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{L}_g V(x) = 0 \right\}$ an.

d) Zeigen Sie, dass $\dot{V} < 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{D} \cup \{0\})$.

Hinweis: Das Regelgesetz $u_{\mathrm{Son}}(x)$ muss hierfür nicht explizit angegeben werden.

e) Zeigen Sie, dass das Regelgesetz nach Sontag die Ruhelage $x_{\mathrm{R}} = 0$ des Systems Σ global asymptotisch stabilisiert.