Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Seminarraum Humboldtbau 201

Dienstag, den 21. 03. 2023

Beginn: 8.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Abgabe: ______

Studiengang: ____________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	16	14	10	16		56
erreichte Punkte						
					Note	

Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Aufgabe 1 **16 Punkte**

Gegeben ist das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x,u) = -\cos(x_1)\,(x_2+1) + u_1\\ \dot{x}_2 &= f_2(x,u) = (x_1+1)\,(x_2-1)^2 + u_2\end{aligned}$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des freien Systems, d.h. für $u \equiv 0$.

Um den Betriebspunkt $x = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^\top$ zu stabilisieren soll das Regelgesetz

$$u(x) = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(x_1)\,(x_2+1) - x_1^3 + x_2^2\\ -\,(x_1+1)\,(x_2-1)^2 - x_2 - x_1x_2\end{pmatrix}$$

verwendet werden. Im Weiteren wird der geschlossene Regelkreis mit Regelgesetz $u(x)$ betrachtet.

b) Zeigen Sie, dass $x = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^\top$ einzige Ruhelage ist. Welche Aussage können Sie über die Stabilität der Ruhelage mit der indirekten Methode von Lyapunov treffen?

c) Prüfen Sie die Stabilität der Ruhelage mit der direkten Methode von Lyapunov unter Verwendung der Funktion $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$.

Um Rechenkapazität zu sparen, soll die folgende Linearisierung des Regelgesetzes genutzt werden:

$$\hat{u}(x) = u(0) + \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{pmatrix}1 + x_2\\ -1 - x_1 + x_2\end{pmatrix}.$$

Ab hier wird der geschlossene Regelkreis mit Regelgesetz $\hat{u}(x)$ betrachtet.

d) Zeigen Sie, dass $x = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^\top$ Ruhelage ist. Welche Aussage können Sie über die Stabilität der Ruhelage mit der indirekten Methode von Lyapunov treffen?

e) Zeigen Sie, dass $x_2 \equiv 0$ die Differentialgleichung $\dot{x}_2 = f_2(x, \hat{u}(x))$ für beliebige $x_1 \in \mathbb{R}$ löst. Betrachten Sie die skalare Differentialgleichung $\dot{x}_1 = f_1\left(\begin{pmatrix}x_1 & 0\end{pmatrix}^\top, \hat{u}\left(\begin{pmatrix}x_1 & 0\end{pmatrix}^\top\right)\right)$, d.h. für den Sonderfall $x_2 \equiv 0$, und zeichnen Sie qualitativ den Graphen von f_1 über x_1. Kann die Ruhelage $x = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^\top$ stabil sein?

Betrachten Sie das allgemeine System $\dot{x} = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} g_i(x)u_i(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ mit den Regelgesetzen $u_i = K_i(x)$ und deren Linearisierungen $\hat{u}_i = K_i(x^*) + \left.\frac{\partial K_i(x)}{\partial x}\right|_{x=x^*}(x - x^*)$ am Punkt x^*.

f) Zeigen Sie, dass die indirekte Methode von Lyapunov für beide Regler u und $\hat{u}$ das gleiche Ergebnis liefert.

Aufgabe 2

14 Punkte

Betrachten Sie das folgende System

$$\dot{x}_1 = -x_2 + 2x_1 - x_1 u$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - x_2 u$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und $u(t) \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle möglichen Betriebspunkte, d.h. die Ruhelagen für allgemeine u.

Im Folgenden betrachten Sie das System für zwei mögliche Eingänge $u = u_1$ bzw. $u = u_2$ mit

$$u_1 = e^{\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} + 3$$
$$u_2 = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{2}.$$

b) Überprüfen Sie für beide Fälle, ob Grenzzyklen ausgeschlossen werden können.

c) Überprüfen Sie gegebenenfalls unter Verwendung von $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, ob das System einen Grenzzyklus besitzt.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $\dot{V}(x) = \alpha(x)V(x)$ für eine Funktion $\alpha(x)$ gilt.

Aufgabe 3

10 Punkte

Betrachten Sie das System zweiter Ordnung

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass die rechte Seite der Differentialgleichung für beliebige Anfangswerte $x(t_0) = x_0$ in $\mathcal{K}_r = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq r^2 < \infty\}$ lokal Lipschitz-stetig ist.

b) Existiert lokal um einen Anfangswert $x_0 \in \mathcal{K}_r$ ab $t \geq t_0$ eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung?

c) Zeigen Sie, dass für beliebige Anfangswerte x_0 im Einheitskreis $\mathcal{K}_1$ die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig ist.

Aufgabe 4

16 Punkte

Gegeben seien die kinetische Energie $T(q,\dot{q})$ sowie die potentielle Energie $U(q)$ mit

$$\begin{aligned} T =& \frac{l^2 m}{2}\left(2\dot{q}_1^2 + 2\cos(q_1 - q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right)\ , \\ U =& -Glm\big(2\cos(q_1) + \cos(q_2)\big)\ , \end{aligned}$$

wobei $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ die generalisierten Koordinaten und $m, l, G > 0$ die Systemparameter sind.

a) Bestimmen Sie die homogene Systemdifferentialgleichung mithilfe des Lagrange-Formalismus. Geben Sie dazu die Terme $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial U}{\partial q}$ explizit an.

b) Stellen Sie das System in Form der Robotikgleichung

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

dar, indem Sie D, C, g angeben. Zeigen Sie, dass $N = \dot{D} - 2C$ schiefsymmetrisch ist.

c) Weisen Sie nach, dass das homogene System konservativ ist, d.h. für $V = T + U$ gilt $\dot{V} = 0$.
Hinweis: Das Umstellen der Robotikgleichung nach $g(q)$ und späteres Einsetzen kann ggf. zu Vereinfachungen führen.

d) Geben Sie für u ein Regelgesetz an, das den Ursprung $q = 0$ asymptotisch stabilisiert.