Fachgebiet Regelungstechnik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Sommer 2023

Kirchhoff-Hörsaal 1
Donnerstag, den 3. 8. 2023
Beginn: 8.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________________

Matr.-Nr.: ______________________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	16	10	16	8		50
erreichte Punkte						

Note	

Aufgabe 1 **16 Punkte**

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\Sigma: \quad \dot{x} = -k|x|^p \operatorname{sign}(x) + d, \quad x(0) = x_0 \quad \text{und die Funktion} \quad V_p(x) = \frac{1}{1+p}|x|^{1+p}$$

mit Parametern $k > 0$ und $p \in \mathcal{P} = \left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$, Zustand $x(t) \in \mathbb{R}$ sowie Störung $d(t) \in \mathbb{R}$.

Es gilt

$$\frac{\partial |y|}{\partial y} = \operatorname{sign}(y) \quad \text{für } y \neq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{sign}(y) = \begin{cases} 1, & \text{für } y \geq 0, \\ -1, & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie für jedes $p \in \mathcal{P}$ alle Ruhelagen von Σ für den störungsfreien Fall, d.h. für $d \equiv 0$.

Im Folgenden berücksichtigen wir Störungen d mit

(i) $|d(t)| \leq D$, für alle $t \geq 0$ mit $D > 0$ sowie

(ii) $|d(t_1) - d(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|$, für alle $t_1, t_2 \geq 0$ mit $L > 0$.

b) Prüfen Sie das Anfangswertproblem Σ für jedes $p \in \mathcal{P}$ auf Existenz und Eindeutigkeit von (stückweise) stetig differenzierbaren Lösungen.

c) Prüfen Sie für jedes $p \in \mathcal{P}$, ob es sich bei V_p um einen Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion handelt. Berechnen Sie außerdem $\dot{V}_p$ für alle $x \neq 0$.

d) Für welche Wahl von $p \in \mathcal{P}$ existiert ein konstantes $k > 0$ so, dass $\dot{V}_p < 0$ für alle $x \neq 0$ gilt? Wie muss k gegebenenfalls gewählt werden?

Hinweis: Berücksichtigen Sie dabei auch die Störung d.

Abschließend betrachten wir den störungsfreien Fall, d.h. $d \equiv 0$.

e) Ordnen Sie den folgenden Lösungen $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, 4$, zulässige Parameter $p \in \mathcal{P}$ sowie $k > 0$ zu und finden Sie geeignete Anfangswerte $x_{0,i}$, $i = 1, \ldots, 4$, die das Anfangswertproblem Σ für diese Parameterwahl erfüllen.

$$x_1 \equiv 0 \qquad\qquad x_2(t) = 3e^{-2t}$$

$$x_3(t) = -3t + 6,\ t \in [0, 2) \qquad\qquad x_4(t) = \frac{1}{4}(4 - 4t)^2,\ t \in [0, 1)$$

Aufgabe 2 **10 Punkte**

Gegeben ist das System

$$\dot{x} = f(x,u) \quad \text{mit} \quad f(x,u) = \begin{pmatrix} x_2 + u \\ -2x_2 - \sin x_1 + u \end{pmatrix}$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$.

Betrachten Sie zunächst das freie System mit $u \equiv 0$.

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des freien Systems.

b) Prüfen Sie die radiale Unbeschränkheit der Funktion $\tilde{V}(x) = \tilde{f}^\top(x)\tilde{f}(x)$ mit $\tilde{f} = f|_{u=0}$.

c) Bestimmen Sie eine Schranke $k_{\min}$ mit $k > k_{\min}$ so, daß der mit dem Regelgesetz $u = -k\,x_1$ geschlossene Regelkreis eine einzige Ruhelage im Ursprung hat.

Nach dem Ansatz von Krasovskii ist $\bar{V}(x) = \bar{f}^\top(x)\bar{f}(x)$ mit $\bar{f} = f|_{u=-k\,x_1}$ ein Kandidat für eine Lyapunov-Funktion.

d) Finden Sie ein Intervall (k_1, k_2), für das $u = -k\,x_1$ mit $k \in (k_1, k_2)$ den Ursprung im geschlossenen Regelkreis $\dot{x} = \bar{f}(x)$ lokal asymptotisch stabilisiert. Wann ist die Stabilitätsaussage global?

Aufgabe 3 **16 Punkte**

Gegeben sei das System

$$\dot{x} = f(x) + Bu + g(x)d(t) = \begin{pmatrix} -x_1^3 - x_2^2 \\ -x_2 - x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} d(t)$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$, Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$ und Störung $d(t) \in \mathbb{R}$, die sich aus $N \in \mathbb{N}$ Schwingungsanteilen zusammensetzt. D.h., es gilt

$$d(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)\,,$$

wobei die Frequenzen $\omega_k > 0$ als bekannt angenommen werden, die Amplitude $A_k \in \mathbb{R}$ und Phasenverschiebung $\varphi_k \in \mathbb{R}$ allerdings unbekannt sind.

a) Zeigen Sie, dass mit einem bekannten $d(t)$ der Ursprung des Systems mit dem Regelgesetz $u(t) = U(x,d) = x_2\big(x_2 - d(t)\big)$ global asymptotisch stabilisiert wird. Geben Sie eine Lyapunov-Funktion $V(x)$ sowie deren zeitliche Ableitung $\dot{V}$ an.

b) Finden Sie einen Parametervektor $\theta \in \mathbb{R}^{2N}, \dot{\theta} = 0$, der alle unbekannten Parameter enthällt und mit bekanntem Vorfaktor $\phi(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ den Störeinfluss linear parametriert gemäß

$$d(t) = \phi(t)^\top \theta\,.$$

Hinweis: Es gilt $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$.

c) Nutzen Sie den Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion $V_e(x,\hat{\theta}) = V(x) + \frac{1}{2\gamma}\|\hat{\theta}(t) - \theta\|_2^2$ mit $\gamma > 0$, um ein Adaptionsgesetz $\dot{\hat{\theta}} = \Gamma(x,t)$ zu bestimmen, das mit $u(t) = U(x,\hat{d}) = \tilde{U}(x,\hat{\theta}) = x_2\left(x_2 - \phi(t)^\top\hat{\theta}\right)$ die zeitliche Änderung $\dot{V}_e$ negativ definit macht, d.h., $\dot{V}_e < 0\,\forall x \neq 0, \hat{\theta}$.

Hinweis : Falls Sie b) nicht lösen konnten, dürfen Sie die Form aus b) direkt annehmen.

d) Existiert $\lim\limits_{t\to\infty}\hat{\theta}(t)$? Kann das dynamische Regelgesetz aus c) die Ruhelage $x = 0$ stabilisieren?

e) Können Sie aus dem exakten Wissen über θ die Werte für A_k, φ_k eindeutig bestimmen?

Aufgabe 4

8 Punkte

Gegeben seien die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems

$$\begin{aligned} c_1\ddot{q}_1 + c_2\cos(q_1-q_2)\ddot{q}_2 + c_2\sin(q_1-q_2)\dot{q}_2^2 &= u_1 \\ c_2\cos(q_1-q_2)\ddot{q}_1 + c_3\ddot{q}_2 - c_2\sin(q_1-q_2)\dot{q}_1^2 &= u_2 \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, den generalisierenden Koordinaten $q(t) \in \mathbb{R}^2$ und dem Eingang $u(t) \in \mathbb{R}^2$.

a) Stellen Sie das System in der Form

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

dar und geben Sie D, C und g an. Ist $\dot{D} - 2C$ schiefsymmetrisch?

b) Geben Sie Bedingungen an die Konstanten c_1, c_2, c_3 an, so dass D positiv definit ist.

c) Geben Sie das Regelgesetz für eine PID-Folgeregelung für $q^\star \in \mathcal{C}^2$ nach dem Computed-Torque-Ansatz an. Dabei sollen alle Eigenwerte kanalweise bei $\lambda_{1,2,3} = -1$ liegen.

Betrachten Sie nun das System

$$D(q)(\ddot{q} + d) + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

mit konstantem Vektor $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Wie wirkt sich d auf den Regelfehler $e := q - q^\star$ unter Regelung mit dem berechneten Regelgesetz stationär aus?