Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Sommer 2016

Hörsaal 2

Montag, den 08. 08. 2016

Beginn: 10.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	14	14	14	10	16	68
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1 **Punkte 14**

Betrachten Sie das folgende System erster Ordnung

$$\dot{x} = -k\,\mathrm{sign}(x)\sqrt{|x|}, \quad k > 0\,.$$

a) Hat das Anfangswertproblem bzgl. des Anfangswerts $x(0) = 0$ eine stetig differenzierbare Lösung? Ist sie notwendigerweise eindeutig?

b) Zeigen Sie mit $V(x) = x^2$ als Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion, dass der Ursprung global asymptotisch stabil ist.

c) Konvergiert die Lösung für $x(0) \neq 0$ in endlicher Zeit in den Ursprung? Wenn ja, bestimmen Sie eine obere Schranke für die Konvergenzzeit.

Weiterer Raum zum Lösen von Aufgabe 1

Aufgabe 2

Punkte 14

Gegeben seien die Systeme erster Ordnung:

$$\text{I.}\quad (\dot{x})^2 - x + 1 = 0 \qquad \text{II.}\quad \dot{x} + 42 - \operatorname{sign}(x) = 0 \qquad \text{III.}\quad \dot{x} + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

a) Berechnen Sie die Ruhelagen der jeweiligen Systeme, sofern es welche gibt.

b) Beurteilen Sie die Stabilität dieser Ruhenlagen.

c) Führen Sie eine Zustandstransformation durch, so dass die Ruhelage in den neuen z-Koordinaten im Ursprung liegt. Geben Sie die jeweiligen Systemgleichungen in z-Koordinaten an.

Weiterer Raum zum Lösen von Aufgabe 2

Aufgabe 3 **Punkte 14**

Gegeben ist das nichtlineare System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = -(2b - g(x_1))x_2 - x_1 \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad g(x_1) = \begin{cases} 0, & |x_1| > 1 \\ k, & |x_1| \leq 1 \end{cases}$$

und $b > 0$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Bendixson-Kriteriums, dass die Existenz von Grenzzyklen für $k < 2b$ ausgeschlossen werden kann.

b) Zeigen Sie mit einer Linearisierung am Ursprung, dass diese Ruhelage für $k > 2b$ instabil ist.

c) Ist die Menge

$$\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$$

bzgl. des Systems positiv invariant? Welchen Schluss können Sie damit bzgl. der Existenz von Grenzzyklen ziehen?

Weiterer Raum zum Lösen von Aufgabe 3

Aufgabe 4 **Punkte 10**

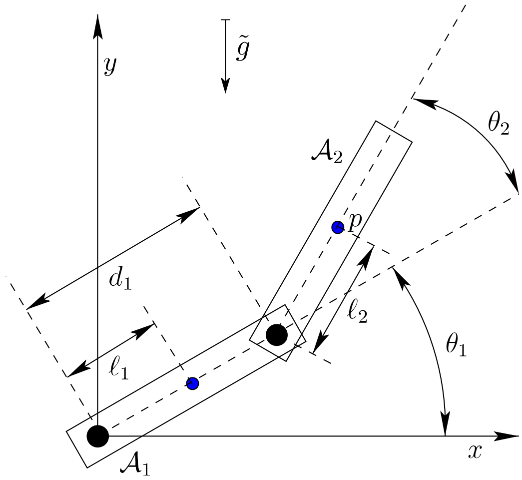

Abbildung 1: Zwei-Arm Roboter

Abb. 1 zeigt die geometrischen Beziehungen eines zweiachsigen Roboters unter Gravitation. Hierbei bezeichnen $\theta_1(t)$ und $\theta_2(t)$ die Gelenkwinkel der beiden Arme $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ des Roboters. In jedem der beiden Gelenke sitzt ein Motor. Sie erzeugen das Drehmoment $u_1(t)$ bzw. $u_2(t)$.

Die Bewegungsgleichungen des Roboters lauten

$$\begin{aligned} m_{11}(\theta_2)\,\ddot{\theta}_1 + m_{12}(\theta_2)\,\ddot{\theta}_2 - c(\theta_1,\theta_2)\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 - c(\theta_1,\theta_2)\,(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\,\dot{\theta}_2 + g_1(\theta_1,\theta_2) &= u_1 \\ m_{12}(\theta_2)\,\ddot{\theta}_1 + m_{22}\,\ddot{\theta}_2 + c(\theta_1,\theta_2)\,\dot{\theta}_1^2 + g_2(\theta_1,\theta_2) &= u_2 \end{aligned}$$

mit gegebenen Funktionen m_{11}, m_{12}, m_{22}, c, g_1 und g_2. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die Zeitargumente in $\theta_i(t)$ und $u_i(t)$ weggelassen.

a) Bringen Sie die Bewegungsgleichungen auf die übliche Darstellungsform

$$D(q)\ddot{q}(t) + C(q,\dot{q})\dot{q}(t) + g(q) = u\,,$$

d.h. bestimmen Sie die zugehörigen Matrizen $D(q)$ und $C(q,\dot{q})$ bzgl. der generalisierenden Koordinaten $q^\top = (\theta_1,\ \theta_2)$.

b) Entwerfen Sie einen PID-Folgeregler nach dem Computed-Torque Ansatz, so dass der Regelfehler $e(t) = q(t) - q^\star(t)$ asymptotisch stabil zu $e = 0$ ausgeregelt wird. Die Eigenwerte der Fehlerdynamik sollen dabei kanalweise bei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -3$ zu liegen kommen. Bestimmen Sie die entsprechenden Verstärkungsmatrizen des PID-Reglers.

c) Welche Anforderung muss an die Referenztrajektorie $q^\star = q^\star(t)$ gestellt werden, damit eine Folgeregelung nach dem Computed-Torque Ansatz stetige Stellsignale liefert?

Umseitig mehr Raum zum Lösen von Aufgabe 4

Aufgabe 5 **Punkte 16**

Gegeben sei das System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3 + u\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 + x_1^2)u\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten quadratischen Lyapunov-Funktion, dass der Ursprung des freien Systems ($u \equiv 0$) global asymptotisch stabil ist.

b) Berechnen Sie einen Regler $u = -k\,\mathcal{L}_g V(x)$ mit geeigneten k, g und V so, dass der geschlossene Regelkreis zusätzliche Dämpfung aufweist.

c) Geben Sie eine Lyapunov-Funktion für den mit dem Regler nach Teilaufgabe b) geschlossenen Regelkreis an.

d) Linearisieren Sie das System des mit Regler nach Teilaufgabe b) geschlossenen Regelkreises am Ursprung. Für welche k ist der Ursprung des linearisierten Systems ein stabiler Strudelpunkt?

Weiterer Raum zum Lösen von Aufgabe 5