Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Winter 2017

Kirchhoff-Hörsaal 1
Freitag, den 31. 03. 2017
Beginn: 10.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Abgabe: ______

Studiengang: ____________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	12	18	10	15		55
erreichte Punkte						
Note						

Aufgabe 1

Punkte 12

Betrachten Sie das System

$$\Sigma: \quad \dot{x} = -R\left(\phi(x) + S(x)x\right),$$

wobei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beide symmetrisch und positiv definit sind. Die vektorwertige Funktion $\phi = \phi(x)$ sei stetig differenzierbar und erfülle $\phi_i(x) = \phi_i(x_i)$. Für beliebige $y \in \mathbb{R}$ und $i = 1, \ldots, n$ gelte: $\phi_i(0) = 0$ und $y\,\phi_i(y) > 0$ in einer Umgebung von $y = 0$.

a) Finden Sie mit der Methode des variablen Gradienten eine Lyapunov-Funktion $V = V(x)$, welche die asymptotische Stabilität des Ursprungs nachweist.

   Hinweis: Es reicht $\frac{\partial V}{\partial x} = (P\,x)^\top$ mit konstanter Matrix P anzusetzen.

b) Unter welcher Bedingung ist der Ursprung *global* asymptotisch stabil? Bringen Sie das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2\sin(x_1) - 2x_1 - x_2 - x_2^5\\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - 6x_2 - 4x_2^5\end{aligned}$$

   in die Form Σ. Untersuchen Sie, ob der Ursprung global asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 2 **Punkte 18**

Ein reibungsfrei auf einer nach oben geöffneten Epizykloide gleitender Massepunkt kann als System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1)\left(c - x_2^2\right)}{2(1-\cos(x_1))}\end{aligned}$$

mit $c > 0$ beschrieben werden.

a) Für welche Anfangsbedingungen $x_1(0)$ ist keine eindeutige Lösung zu erwarten?

b) Geben Sie die möglichen Ruhelagen des Systems in Gebieten eindeutiger Lösungen an.

c) Schließen Sie Grenzzyklen im Teilgebiet $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) |\, 0 < x_1 < \pi \ \wedge \ 0 < x_2 < 2\pi\}$ aus.

d) Bestimmen Sie die Umlaufzeit der möglichen Orbits. Zeigen Sie hierzu, dass sich das System auf die Form

$$\ddot{z} + \frac{c}{4} z = 0$$

transformieren lässt. Nutzen Sie die folgenden Additionstheoreme und die Substitution

$$\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\varphi)\right), \quad \sin(\varphi) = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad z = \cos\left(\frac{x_1}{2}\right).$$

Im transformierten System wird nun der Einfluss einer trockenen Reibung betrachtet:

$$\ddot{z} + \frac{c}{4} z = -F_R(z, \dot{z}) \quad \text{mit} \quad F_R(z, \dot{z}) = \begin{cases} \mu \operatorname{sign}(\dot{z}), & \dot{z} \neq 0 \\ \mu, & \dot{z} = 0,\ \frac{c}{4} z > \mu \\ -\frac{c}{4} z, & \dot{z} = 0,\ \frac{c}{4} z \leq \mu \end{cases}$$

e) Zeigen Sie, dass das transformierte System für $\mu < \frac{c}{4}$ mit den Anfangswerten $z(0) = 1$ und $\dot{z}(0) = 0$ in endlicher Zeit in eine Ruhelage konvergiert.

Aufgabe 3

Punkte 10

Gegeben sei die Zustandsdarstellung eines elektrischen Netzwerks mit Kondensator (Kapazität C), Spule (Induktivität L) und Widerstand R:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{L(x_1)}\,(-x_2 - x_1\,R) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C}\,x_1 \end{aligned}$$

Dabei ist x_1 der Strom durch die Spule und x_2 die Spannung am Kondensator. Die Induktivität weist das nichtlineare Verhalten

$$L = L(x_1) = L_0 + \frac{L_1}{1 + x_1^2}$$

auf. Für die Parameter gelte L_0, L_1, C, $R > 0$.

a) Kommt die Funktion

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(L_0\,x_1^2 + C\,x_2^2\right) + \frac{L_1}{2}\,\ln\left(\frac{L_1}{L(x_1) - L_0}\right)$$

als Kandidat für die direkte Methode von Lyapunov infrage?

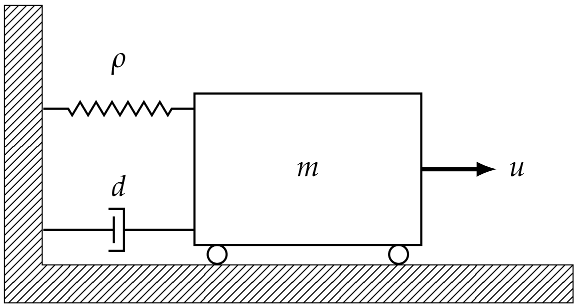
Welche Eigenschaften muss die Funktion haben, um damit globale asymptotische Stabilität zeigen zu können?

b) Zeigen Sie, dass die gegebene Funktion eine Lyapunov-Funktion für das obige System ist.

c) Weisen Sie gegebenenfalls globale asymptotische Stabilität nach.

Aufgabe 4 **15 Punkte**

In einem Bearbeitungszentrum soll ein zu bearbeitendes Werkstück positioniert werden. Der Prozess kann vereinfacht durch ein Feder-Masse-Dämpfer-System beschrieben werden, welches in der folgenden Abbildung dargestellt ist.



Das dynamische Verhalten lässt sich demnach wiedergeben als:

$$m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + \rho\,x = u\,. \tag{1}$$

Dieses System soll mit dem Regler

$$u = d\,\dot{x} + \rho\,x + m\ddot{x}_{\mathrm{r}} - K\,s \tag{2}$$

stabilisiert werden ($K > 0$). Dabei sind $\dot{x}_{\mathrm{r}} := \dot{x}^\star - \Lambda\,(x - x^\star)$ mit $\Lambda > 0$ und $s := \dot{x} - \dot{x}_r$ Hilfsgrößen.

a) Zeigen Sie, dass der Regler (2) das System (1) entlang der Solltrajektorie $x^\star = x^\star(t)$ stabilisiert, d.h. der Regelfehler $e = x - x^\star$ asymptotisch stabil zu null konvergiert.

   Hinweis: Der Nachweis kann auch ohne Lyapunov-Funktion erfolgen.

b) Welche Anforderungen müssen an die Solltrajektorie $x^\star$ gestellt werden?

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die Parameter m, d und ρ nicht bekannt sind.

c) Geben Sie einen adaptiven Folgeregler an, bestehend aus Regelgesetz und Adaptionsvorschrift, welcher das System entlang der Solltrajektorie $x^\star$ stabilisiert.

   Hinweis: $V(e, \dot{e}) = \frac{1}{2}\,ms^2$ ist eine Lyapunov- Funktion für das nominelle System.

d) Können mit diesem adaptiven Regler die Parameter des Systems exakt bestimmt werden?