Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Sommer 2017

Hörsaal 2

Montag, den 31. 07. 2017

Beginn: 15.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ________________

Matr.-Nr.: ________________ Abgabe: ______

Studiengang: ________________ Zusatzblätter: ___

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	10	18	10	17		55
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

10 Punkte

Gegeben sei das System

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(2 - 3x_1^2 - 2x_2^2)$$

a) Bestimmen Sie für die Funktion $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ die zeitliche Ableitung $\dot{V}$ als Funktion von x.

b) Ist die Menge $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^2 | V(x) \leq 1\}$ positiv invariant?

c) Enthält $\mathcal{M}$ mindestens einen Grenzzyklus?

Aufgabe 2

18 Punkte

Ein Positioniersystem mit zwei Freiheitsgraden genügt den folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\left(m_2 q_2^2 + J_1 + J_2\right) \ddot{q}_1 + \left(g \cos(q_1) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2\right) m_2 q_2 = u_1 \tag{1a}$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + m_2 g \sin(q_1) - m_2 q_2 \dot{q}_1^2 = u_2 \tag{1b}$$

mit der konstanten Läufermasse m_2 und den entsprechenden Trägheitsmomenten J_1 und J_2. Zur verbesserten Übersichtlichkeit wurde auf die Darstellung der Zeitabhängigkeit in $q_i(t)$ und $u_i(t)$ verzichtet.

a) Überführen Sie die Bewegungsgleichungen (1a) und (1b) in die Matrixschreibweise der Robotikgleichung:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B_u(q, \dot{q})u.$$

b) Zeigen Sie die Schiefsymmetrie der Matrix $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$.

Es soll für das System ein PID-Folgeregeler nach dem Computed-Torque Ansatz entworfen werden.

c) Bestimmen Sie die Matrizen K_P, K_I und K_D so, dass die Eigenwerte kanalweise bei $\lambda_1 = -10$ und $\lambda_{2,3} = -2 \pm j$ liegen.

d) Geben Sie das Regelgesetz für u explizit an.

e) Welche der folgenden Trajektorien $q^\star = q^\star(t)$ und $q^{\star\star} = q^{\star\star}(t)$ ist bezüglich der Anfangswerte $q(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}^\top$ und $\dot{q}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$ im Zeitintervall $t \in [0,\ 1]$ geeignet?

$$q^\star(t) = \begin{pmatrix} -2t^3 + 3t^2 \\ -4t^3 + 6t^2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad q^{\star\star}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 **10 Punkte**

Betrachtet wird das nichtlineare System 2. Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2^2 + \cos(x_1)u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2}x_2 + 2\,x_1\,x_2\end{aligned}$$

mit $x_1, x_2, u \in \mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach, dass $V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ eine Lyapunov Funktion für das freie System ($u \equiv 0$) ist.

b) Entwerfen Sie einen LgV-Regler mit nichtlinearer Dämpfung für das oben angegebene System. Geben Sie hierbei das Regelgesetz sowie eine Lyapunov Funktion für den geschlossenen Regelkreis an.

c) Für $x_1 = \frac{\pi}{2}$ kann über den Eingang u kein Einfluss auf das System genommen werden. Wieso lässt sich das System dennoch stabilisieren?

Aufgabe 4 **17 Punkte**

Betrachten Sie das System

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & -R(p,q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial q} & \frac{\partial V}{\partial p} \end{pmatrix}^\top \quad \text{mit} \quad V = \frac{1}{2} p^\top M(q)^{-1} p + U(q)$$

und $q, p \in \mathbb{R}^n$, $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Nullmatrix und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Einheitsmatrix. Für die Matrizen $R(p,q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $M(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $R(p,q)^\top = R(p,q) > 0$ und $M(q)^\top = M(q) > 0$. Zudem sei $U : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ auf $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $U(0) = 0$ und $U(x) > 0 \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$.

a) Eignet sich V als Kandidat für eine Lyapunov-Funktion? Bestimmen Sie $\dot{V}$.

b) Ist der Ursprung des Systems stabil bzw. auch asymptotisch stabil?

Für die radiale Unbeschränkheit einer positiv definiten Funktion V könnte man meinen, es reiche zu zeigen, dass $V \to \infty$ entlang der Koordinatenachsen gilt. Dies ist jedoch nicht hinreichend, wie man mit folgender Funktion im Fall $n = 2$ belegen kann:

$$V(p,q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+q_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \frac{q_1^2 + 2q_2^2}{3 + (q_1 + 2q_2)^2} + (q_1 - 2q_2)^2.$$

c) Zeigen Sie: $V(p,q) \to \infty$ für $\left\| \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\| \to \infty$ entlang der Achsen $p_1, p_2, q_1 = 0$ und $p_1, p_2, q_2 = 0$.

d) Ist $V(p,q)$ radial unbeschränkt? (Begründung)

Hinweis: Für Teilaufgabe a) muß $\frac{\partial M(q)^{-1}}{\partial q}$ nicht berechnet werden.