Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Winter 2018

Sr HU 211/212
Montag, den 26. 03. 2018
Beginn: 13.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Abgabe: ________

Studiengang: ____________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	20	30	20	10		80
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

20 Punkte

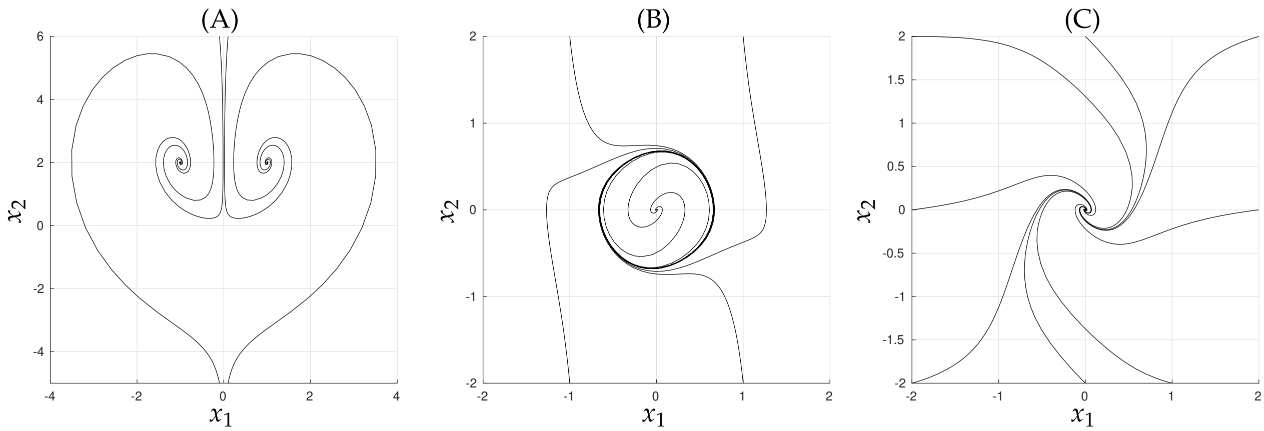
Gegeben seien die folgenden drei Systeme 2. Ordnung

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -2\,x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 = 2\,x_1 - x_1\,x_2 \\ \dot{x}_2 = 2\,x_1^2 - x_2 \end{cases} \qquad \Sigma_3 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2\left(1 - 3\,x_1^2 - 2\,x_2^2\right) \end{cases}$$

a) Geben Sie die Ruhelagen der Systeme an.

b) Können Sie mit dem Bendixson-Kriterium Grenzzyklen in System Σ_1, Σ_2 bzw. Σ_3 ausschließen?

c) Im Folgenden sind 3 verschiedene Phasenportraits abgebildet:



Ordnen Sie die Systeme Σ_1, Σ_2 und Σ_3 den Phasenportraits (A), (B), und (C) zu (Begründung).

d) Zeichnen Sie die Richtung der Trajektorie für zunehmende Zeit in das Phasenportrait ein und beurteilen Sie die Stabilität der Ruhelagen des Systems.

Aufgabe 2 **30 Punkte**

Betrachten Sie die zeitvarianten Systeme

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = \left(1 - \frac{2}{1+e^{-t}}\right) x_2 - \frac{a}{t^2+1}\, x_1^3 \\ \dot{x}_2 = \frac{e^t-1}{e^t+1}\, x_1 - \frac{b}{t^2+1}\, x_2^3 \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)\sin(t) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)\cos(t) \end{cases}$$

mit den konstanten Parametern $a, b > 0$.

a) Untersuchen Sie mit der direkten Methode von Lyapunov, ob die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ jeweils für das System Σ_1 und Σ_2 gleichmäßig asymptotisch stabil ist.

   Hinweis: Für etwaige Abschätzungen können Sie verwenden, dass $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $v^T w \leq \|v\|\|w\|$ gilt (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

b) Schätzen Sie den Einzugsbereich der Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ jeweils bzgl. des Systems Σ_1 bzw. Σ_2 ab.

Aufgabe 3 **20 Punkte**

Das nichtlineare System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) + 3x_2 \\ -x_1 + x_2(1 + 2x_1^2 + 2x_2^2) + x_3 \\ -x_2 + x_3(1 + 2x_1^2 + 2x_2^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

soll an der Ruhelage $x_R = 0$ (des freien Systems) durch Sontags Universalregler nach Möglichkeit global asymptotisch stabilisiert werden.

a) Zeigen Sie, dass das System am Betriebspunkt $(x_R, u_R) = (0, 0)$ nicht asymptotisch stabil ist.

b) Berechnen Sie einen Linear Quadratisch optimalen Regler (LQR) $u = u_{LQR}(x)$, der das System bei $x_R = 0$ lokal stabilisiert. Nutzen Sie dazu die Wichtungsmatrizen

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Für die Lösung P der Riccati-Gleichung können Sie eine Diagonalmatrix ansetzen.

c) Berechnen Sie für das nach Teilaufgabe b) lokal stabilisierte System einen Universalregler nach Sontag mit Verstärkungsmatrix

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

10 Punkte

Die Eingangs-/Ausgangsdynamik eines 2-achsigen Pick & Place-Automaten sei gegeben durch

$$
\begin{aligned}
(m_1+m_2)\ddot{q}_1 + \frac{m_2 l}{2}\ddot{q}_2\cos(q_2) + \frac{m_2 l}{2}\dot{q}_2^2\sin(q_2) + b_1\dot{q}_1 + kq_1 &= u_1 \\
\frac{m_2 l^2}{3}\ddot{q}_2 + \frac{m_2 l}{2}\ddot{q}_1\cos(q_2) + b_2\dot{q}_2 &= u_2
\end{aligned}
$$

a) Zeigen Sie, dass das Regelgesetz

$$
u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_2 l}{2}\dot{q}_2^2\sin(q_2) + b_1\dot{q}_1 + kq_1 \\ b_2\dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1+m_2 & \frac{m_2 l}{2}\cos(q_2) \\ \frac{m_2 l}{2}\cos(q_2) & \frac{m_2 l^2}{3} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} -\cos(t) - 4(\dot{q}_1+\sin(t)) - 6(q_1-\cos(t)) - 4\int_0^t (q_1-\cos(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_0^t\int_0^{\tau_1}(q_1-\cos(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1 \\ -\sin(t) - 4(\dot{q}_2-\cos(t)) - 6(q_2-\sin(t)) - 4\int_0^t (q_2-\sin(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_0^t\int_0^{\tau_1}(q_2-\sin(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1 \end{pmatrix}
$$

das Geschwindigkeitsprofil

$$
\begin{pmatrix} \dot{q}_1^\star(t) \\ \dot{q}_2^\star(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}
$$

asymptotisch stabilisiert.

b) Welchen Unterschied stellen Sie zum klassischen Computed-Torque Ansatz fest?