Fachgebiet Regelungstechnik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Sommer 2018

Humboldt-Hörsaal
Dienstag, den 24. 07. 2018
Beginn: 08.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	25	18	17	18		78
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

25 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

I) $\dot{x} = -\sqrt{|x|}\,\operatorname{sign}(x), \quad x(0) = 1$

II) $\dot{x} = -x + \frac{x}{1+x^2}, \quad x(0) = 0$

III) $\dot{x} = x + \sin(x), \quad x(0) = 0$

IV) $\dot{x} = -(1 + x^2), \quad x(0) = 0$

a) Untersuchen Sie jeweils die Stetigkeit, lokale und globale Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite.

b) Existiert zu jedem Anfangswertproblem lokal mindestens eine stetig differenzierbare Lösung?

c) Sind diese lokalen Lösungen eindeutig? Existieren diese Lösungen auch global?

d) Bestimmen Sie die jeweiligen Ruhelagen. Sind diese Ruhelagen (lokal) asymptotisch stabil?

Aufgabe 2

18 Punkte

Gegeben ist das folgende System

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \theta_1(t)\, x_2(t) - \theta_2(t)\, x_1(t)^3 \,, \\ \dot{x}_2(t) = -\theta_1(t)\, x_1(t) - \theta_2(t)\, x_2(t)^3 \end{cases}$$

mit unbekannten, zeitveränderlichen Parametern $\theta^\top(t) := (\theta_1(t),\ \theta_2(t))$. Für sie gelten die Schranken $A \geq \theta_1(t) \geq a > 0$ und $B \geq \theta_2(t) \geq b > 0$. Ihr Wachstum $\dot{\theta}(t) = f(t)$ ist mit der Lipschitzkonstanten $L > 0$ abschätzbar, d.h. $\|f(t)\|_2 \leq L$.

a) Zeigen Sie mit der direkten Methode von Lyapunov, dass die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ gleichmäßig asymptotisch stabil ist. Welche Aussagen können Sie zum Einzugsbereich von x_R treffen?

Nun sollen die zeitvarianten Parameter $\theta_1(t)$ und $\theta_2(t)$ geschätzt werden. Dafür werden $x_1(t), x_2(t)$ sowie $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ als bekannte Signale angenommen.

b) Bestimmen Sie die Matrix $M(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zur Parameterdarstellung des Systems Σ in der Form $z(t) = \dot{x}(t) = M(t)\theta(t)$. Sind die erzeugten zeitabhängigen Hilfssignale $z(t), M(t)$ beschränkt? Für welche Bereiche ist $M(t)$ invertierbar?

c) Finden Sie unter Nutzung des Schätzgesetzes

$$\Sigma_{\hat{\theta}} : \quad \dot{\hat{\theta}} = -k\, M^\top(t)\, \mathrm{sign}\Big(M(t)\hat{\theta} - z(t)\Big)$$

mit Eingangssignalen $z(t), M(t)$ und beliebigem $k > 0$ eine Darstellung der Schätzfehlerdynamik $\dot{e} = F(t, e)$ bzgl. Fehler $e(t) := \hat{\theta}(t) - \theta(t)$.

d) Nutzen Sie den Lyapunovfunktionskandidaten $V(t, e) = \frac{1}{2k} e^T e$ zur Bestimmung von $\dot{V}(t, e)$. Unter welchen Bedingungen konvergiert der Schätzwert $\hat{\theta}$ zum Parametervektor θ? Können diese hier erfüllt werden?

Hinweis: Die sign-Funktion ist für Vektoren komponentenweise definiert. Benutzen Sie gegebenenfalls Abschätzungen aus Tabelle 1.

Tabelle 1: Nützliche Abschätzungen und Normen ($v, w \in \mathbb{R}^n; M \in \mathbb{R}^{m\times n}$)

Abschätzung	Beziehung
p-Normen	$\|v\|_2 \leq \|v\|_1$
Cauchy-Schwarz	$\lvert v^T w\rvert \leq \|v\|_2 \|w\|_2$
Minimale Streckung	$\sigma_{\min}(M)\|v\|_2 \leq \|Mv\|_2$

Norm	Berechnung
$\|v\|_1$	$\sum_{i=1}^n \lvert v_i\rvert = \mathrm{sign}(v)^T v$
$\|v\|_2$	$\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v^T v}$
$\|M\|_2$	$\sqrt{\sigma_{\max}(M)} = \sqrt{\lambda_{\max}(M^T M)}$

Aufgabe 3

17 Punkte

Ein schwingungsfähiges Feder-Masse-Dämpfer-System hat die Eingangs-/Ausgangsdarstellung

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = \frac{1}{b}\, u$$

mit Parametern a_1, a_0, $b > 0$. Das System soll mit dem Regler

$$u = b\,(a_1 \dot{x} + a_0\, x + \, \ddot{x}_r) - K\, s$$

einer Solltrajektorie $x^\star$ folgen. Dabei gilt für die o.g. Hilfsgrößen $s := \dot{x} - \dot{x}_r$ und $\dot{x}_r := \dot{x}^\star - \Lambda\,(x - x^\star)$ mit $\Lambda > 0$ und $K > 0$.

a) Bestimmen Sie das System im geschlossenen Regelkreis. Lösen Sie dabei nach $\dot{s} = \ddot{x} - \ddot{x}_r$ auf.

b) Zeigen Sie, dass $V = \frac{b}{2} s^2$ eine Lyapunov-Funktion des geregelten Systems ist und damit, dass der Regelfehler $e = x - x^\star$ asymptotisch stabil zu null konvergiert.

c) Welche Anforderungen werden an die Solltrajektorie $x^\star$ gestellt?

Nachfolgend wird angenommen, dass der Parameter b nicht genau bekannt ist.

d) Bestimmen Sie nun einen adaptiven Folgeregler, der die Lösung entlang der Solltrajektorie $x^\star$ asymptotisch stabilisiert.

   Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Barbălat.

Aufgabe 4 **18 Punkte**

Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_1 x_2 + 4x_1 + 3x_2^2 \\ -3x_2^2 - 3x_2 - 5x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u$$

mit Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ im freien System ($u \equiv u_\mathrm{R} = 0$). Ein Universalregler nach Sontag soll die Ruhelage x_R asymptotisch stabilisieren.

a) Untersuchen Sie die Stabilität des Betriebspunkts $(x_\mathrm{R}, u_\mathrm{R}) = (0,\ 0)$.

b) Entwerfen Sie einen Polvorgaberegler $u = u_\mathrm{Pol}(x)$ für das an dem Betriebspunkt linearisierte System. Wählen Sie dabei die Wunschpole $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$.

c) Bestimmen Sie für die Lyapunov-Funktion $V = \frac{1}{2}x^\top x$ die Ableitung entlang der Lösung, d.h. $\dot{V}$ des mit $u = u_\mathrm{Pol}(x)$ geregelten Systems, und zeichnen Sie die Menge $\mathcal{V}_- = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{V}(x) \leq 0\right\}$.
Hinweis: $(ax_1 + bx_2 + c)\left(x_1^2 + ex_2^2\right) = ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_1^2 + aex_1x_2^2 + bex_2^3 + cex_2^2$

d) Berechnen Sie bzgl. Lyapunov-Funktion V einen Universalregler nach Sontag $u_\mathrm{Son}(x)$ so, daß $u = u_\mathrm{Pol}(x) + u_\mathrm{Son}(x)$.

e) Bestimmen Sie nun $\dot{V}$ im gesamten Regelkreis, d.h. mit Rückführung $u = u_\mathrm{Pol}(x) + u_\mathrm{Son}(x)$. Ist der Einzugsbereich größer als der mit dem Polvorgaberegler $u = u_\mathrm{Pol}(x)$ alleine? (Begründung)