Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Sommer 2019

Humboldt-Hörsaal
Dienstag, den 30. 07. 2019
Beginn: 08.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	10	15	15	13		53
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

10 Punkte

Gegeben ist das folgende System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^3.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie mit der Methode des variablen Gradienten eine Lyapunov-Funktion und weisen Sie die globale asymptotische Stabilität der Ruhelage nach.

Aufgabe 2

15 Punkte

Gegeben ist das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \cos(x_2) + 2x_1 + u_1\\ \dot{x}_2 &= (x_3 - 1)^2 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_2\right) + u_2\\ \dot{x}_3 &= -x_3 + 1.\end{aligned}$$

a) Geben Sie alle Ruhelagen $x_R = \begin{pmatrix} x_{1,R} & x_{2,R} & x_{3,R}\end{pmatrix}^\top$ des freien Systems ($u_1 = u_2 = 0$) an.

b) Geben Sie die Ruhelage $\tilde{x}_R$ des freien Systems an, für die $\tilde{x}_{2,R} = 0$ gilt.

c) Transformieren Sie die Systemgleichung mittels $z = x - \tilde{x}_R$. Ist $z_R = 0$ eine Ruhelage des freien Systems?

Betrachten Sie nun die Funktion

$$V = \frac{1}{2} z^\top z.$$

d) Bestimmen Sie (unter Verwendung von V) Zustandsrückführungen $u_1 = u_1(z)$ und $u_2 = u_2(z)$ so, dass $z_R = 0$ im geschlossenen Regelkreis global asymptotisch stabil ist.

e) Nehmen Sie an, dass $u_2 = 0$ gilt und u_1 wie in der vorherigen Teilaufgabe gewählt wird. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen mit Hilfe von $V = \frac{1}{2}z^\top z$ getroffen werden können:

(i) $z_R = 0$ ist global asymptotisch stabil.

(ii) Für alle Anfangswerte $z(0) \in \mathbb{R}^3$ ist die Lösung $z = z(t)$ beschränkt.

(iii) $z_R = 0$ ist lokal asymptotisch stabil.

(iv) $z_R = 0$ ist lokal stabil.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 3 **15 Punkte**

Betrachten Sie das System zweiter Ordnung mit $R > 0$:

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R\right) x_1 \tag{1a}$$

$$\dot{x}_2 = \alpha x_1 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R\right) x_2. \tag{1b}$$

a) Ist die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ des Systems lokal asymptotisch stabil?
Hinweis: Sie können den Grenzwert $\lim\limits_{(a,b)\to 0} \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$ verwenden.

b) Bestimmen Sie anhand des Lyapunovfunktionskandidaten

$$V(x_1, x_2) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2$$

die Menge $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(x_1, x_2) \leq 0 \right\}$.

c) Überprüfen Sie, ob mit $\mathcal{D}$ der Einzugsbereich Ω_c der Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ abgeschätzt werden kann. Bestimmen Sie hierzu die Konstante $c > 0$ so, dass gilt

$$V(x_1, x_2) < c, \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

d) Zeichnen Sie den Einzugsbereich im Phasenportrait ein und bestimmen Sie die Richtungen der Trajektorien.

e) Zeigen Sie, dass die Ruhelage im Einzugsbereich exponentiell stabil ist.

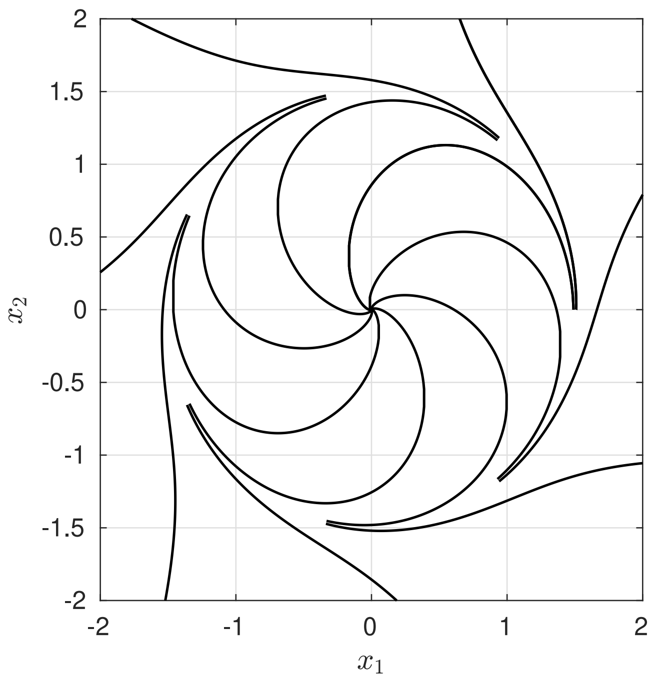

Abbildung 1: Phasenportrait für verschiedene Anfangswerte.

Aufgabe 4 **13 Punkte**

Betrachten Sie das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(x_1^2+1) \\ -2x_1^3 - 2x_1 - x_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

mit Ruhelage $x_R = 0$ im freien System ($u \equiv 0$).

a) Wählen Sie eine quadratische Lyapunov-Funktion und zeigen Sie, dass die Ruhelage $x_R = 0$ des freien Systems asymptotisch stabil ist.

   Hinweis: Verwenden Sie das Invarianzprinzip von Krasovskii-LaSalle.

b) Entwerfen Sie einen $\mathrm{L_gV}$-Regler $u = u_{\mathrm{L_gV}}(x)$ so, dass die Eigenwerte der Jacobi-Linearisierung bei $x_\mathrm{R} = 0$ im geschlossenen Regelkreis zu -1, -2 zu liegen kommen.

c) Entwerfen Sie einen Universalregler nach Sontag, $u = u_{\mathrm{Sontag}}(x)$, mit Parameter K wie beim $\mathrm{L_gV}$-Regler. Ist das Verhalten im geschlossenen Regelkreis in der Nähe von $x_\mathrm{R} = 0$ ähnlich?

d) Sind die Regelgesetze $u_{\mathrm{L_gV}}$ und u_{Sontag} für alle $x_2 > 0$ begrenzt? Begründen Sie ihre Antwort.