Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Sommer 2020

Helmholtz-Hörsaal
Montag, den 20. 07. 2020
Beginn: 14.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	12	20	15	15		62
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1 **12 Punkte**

Betrachten Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

$$(i) \quad \dot{x} = -|x|\,, \; x(0) = 1\,,$$

$$(ii) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 \\ 1 & \sin(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \operatorname{sign}(t-1) \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}, \; x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(iii) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - (1 - x_1^2)x_2 \end{pmatrix}, \; x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Existiert zu jedem Anfangswertproblem lokal mindestens eine stetig differenzierbare Lösung?

b) Untersuchen Sie die lokale und globale Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite.

c) Sind diese lokalen Lösungen eindeutig? Existieren diese Lösungen auch global?

Aufgabe 2

20 Punkte

Betrachten Sie das System

$$\dot{x}_1 = a\,x_2 + b\,x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = c\,x_1 + d\,x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

mit im weiteren festzulegenden Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Das System soll in Polarkoordinaten mit $x_1 = r\cos\phi$ und $x_2 = r\sin\phi$ untersucht werden.

a) Bestimmen Sie für dieses System die Systemdarstellung

$$\dot{r} = f_r(r, \phi)$$
$$\dot{\phi} = f_\phi(r, \phi)$$

in Polarkoordinaten.

Im folgenden werden a und b vorgegeben. Die verbleibenden Konstanten c und d sollen jeweils so festgelegt werden, dass $f_r = f_r(r)$ und $f_\phi \equiv$ konst. gilt.

b) Sei $a = 1$ und $b = 1$. Bestimmen Sie c und d. Wie lautet dann die Systemdarstellung?

c) Sei $a = 1$ und $b = -1$. Bestimmen Sie c und d. Wie lautet dann die Systemdarstellung?

d) Sei $a = -1$ und $b = 1$. Bestimmen Sie c und d.. Wie lautet dann die Systemdarstellung?

e) Sei $a = -1$ und $b = -1$. Bestimmen Sie c und d. Wie lautet dann die Systemdarstellung?

f) Skizzieren Sie qualitativ das Phasenportrait der in Teilaufgabe b) bis e) erhaltenen Systeme in der x_1-x_2–Ebene.

Aufgabe 3

15 Punkte

Gegeben sei das System

$$\dot{x}_1 = \Phi(x_1) + (x_2)^3 \cos(x_1)$$
$$\dot{x}_2 = \Theta \cos(x_1) + u$$

mit der bekannten Konstanten Θ und der Funktion

$$\Phi(x_1) = \begin{cases} -x_1{}^2 & \text{für } x_1 \geq 0, \\ -x_1{}^3 & \text{für } x_1 < 0. \end{cases}$$

a) Betrachten Sie das System zunächst für $x_2 \equiv 0$. Zeigen Sie unter Verwendung einer Lyapunov-Funktion V_1, dass die Ruhelage $x_{1,\mathrm{R}} = 0$ asymptotisch stabil ist.

b) Gegeben sei nun die Funktion $V_2 = \frac{1}{2}x_1{}^2 + \frac{1}{4}x_2{}^4$. Bestimmen Sie mittels V_2 ein Regelgesetz $u = u(x_1)$ so, dass die Ruhelage $x_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$ stabil ist.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass u nicht von x_2 abhängen darf.

c) Ist die Ruhelage x_R im mit dem entworfenen Regelgesetz geschlossenen Regelkreis asymptotisch stabil?

Von nun an sei die Konstante Θ unbekannt. Unter Verwendung des zuvor bestimmten Regelgesetzes soll ein adaptiver Regler entworfen werden. Der Schätzwert sei $\hat{\Theta}$ und der Schätzfehler $\tilde{\Theta} := \hat{\Theta} - \Theta$.

d) Geben Sie einen Ansatz $u = u(x_1, \hat{\Theta})$ für die Regelung an, der das nominale System stabilisiert.

e) Bestimmen Sie unter Verwendung von $V_3 = V_2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\Theta}^2$ ein Adaptionsgesetz $\dot{\hat{\Theta}} = r(x_1, x_2, \hat{\Theta})$, so dass die Ruhelage $\begin{pmatrix} x_\mathrm{R} & \tilde{\Theta}_\mathrm{R} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$ stabil ist.

f) Bestimmen Sie die größte positiv invariante Menge für $\dot{V}_3 = 0$. Konvergiert die Schätzgröße $\hat{\Theta}$ für $t \to \infty$ gegen den Wert Θ?

Aufgabe 4

15 Punkte

Gegeben ist ein Starrkörpersystem, das den folgenden Bewegungsgleichungen genügt:

$$p\ddot{q}_1 + m_2 l\ddot{q}_2 + (m_1+m_2)l^2\ddot{q}_1 + m_2 q_2^2\ddot{q}_1 + 2m_2 q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{m_2}{2}gq_2\sin(q_1) + \left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)gl\cos(q_1) = \tau_1$$
$$m_2\ddot{q}_2 + m_2 l\ddot{q}_1 - m_2 q_2\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}g\cos(q_1) = \tau_2.$$

Das System mit dem unbekannten Parameter p kann auf die Darstellung

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = u$$

gebracht werden. Dabei ist

$$D(q) = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l^2 + m_2 q_2^2 + p & lm_2 \\ lm_2 & m_2 \end{pmatrix}, \quad G(q) = \begin{pmatrix} \left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)gl\cos(q_1) - \frac{1}{2}m_2 g q_2\sin(q_1) \\ \frac{1}{2}m_2 g\cos(q_1) \end{pmatrix}$$

und für die Matrix $C(q,\dot{q})$ gibt es mehrere Möglichkeiten. Unter anderem:

$$C_1(q,\dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 2m_2 q_2\dot{q}_1 \\ -m_2 q_2\dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2(q,\dot{q}) = \begin{pmatrix} m_2 q_2\dot{q}_2 & m_2 q_2\dot{q}_1 \\ -m_2 q_2\dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie, ob $C_1(q,\dot{q})$ oder $C_2(q,\dot{q})$ hinsichtlich der Stabilitätsanalyse die bessere Wahl für $C(q,\dot{q})$ ist. Nehmen Sie dabei an, dass der Parameter p konstant ist.

Nachfolgend soll ein Folgeregler mit I-Anteil nach dem Computed-Torque-Ansatz bestimmt werden.

b) Welche Forderung muss die Solltrajektorie $q^\star = q^\star(t)$ erfüllen, damit die Stellgröße u stetig ist?

c) Geben Sie für die Solltrajektorie

$$q^\star = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ 6t^5 - 15t^4 + 10t^3 \end{pmatrix}$$

das Regelgesetz für u im Zeitintervall $t \in [0,1]$ explizit an. Der Parameter p wird als bekannt und positiv angenommen. Die Eigenwerte der Folgefehlerdynamik sollen kanalweise bei -5 liegen. Welche konstanten Störungen können kompensiert werden?

d) Sei nun $p = -m_1 l^2 - m_2 q_2^2$. Zeigen Sie, dass der Folgefehler $e^\top = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{6}lt^3 \end{pmatrix}$ die Folgefehlerdynamik im Regelkreises mit dem computed-torque-Regler mit I-Anteil erfüllt. Warum wird in diesem Fall $e = 0$ nicht notwendigerweise global asymptotisch stabilisiert?

Hinweis: Werten Sie $D(q)(\ddot{q} - v) = 0$ aus.