Nichtlineare Regelungssysteme 1 — Übung 2

Sommer 2015

Aufgabe 1

Gegeben sei eine nichtlineare zeitvariante Differentialgleichung

$$\dot{z} = f(z, t), \quad z(t_0) = z_0 \,.$$

Die rechte Seite $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sei global Lipschitz-stetig in x mit Lipschitzkonstante L. Betrachten Sie nun 2 Lösungen, $z = x(t)$ und $z = y(t)$, dieser Differentialgleichung zu den Anfangswerten $x(t_0) = x_0$ und $y(t_0) = y_0$. Geben Sie eine obere Schranke für das zeitliche „Auseinanderdriften“ der beiden Anfangswerte an.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß das zeitvariante lineare System

$$\dot{x} = A(t)\, x, \quad x(t_0) = x_0$$

mit $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (stückweise) stetig in t und beschränkten Einträgen $|a_{ij}| \leq K < \infty$ für $t \geq t_0$

a) mindestens eine (stückweise) stetig differenzierbare Lösung hat und

b) diese Lösung global eindeutig ist.

Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete induzierte Matrixnorm bezüglich der Matrix $A(t)$.

Veranschaulichen Sie sich das Ergebnis mit Hilfe der folgenden Systeme ($t \geq t_0$):

(i) $$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(t) & -sin(t) \\ 0 & sin(t) & cos(t) \end{bmatrix}$$

(ii) $$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{t}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie für die folgenden Systeme erster Ordnung die lokale bzw. globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

a) $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$

b) $\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0$

c) $\dot{x} = |x| + x^2, \quad x(0) = 0$

d) $\dot{x} = x \cos t, \quad x(0) = x_0$

e) $\dot{x} = \operatorname{sign} t \cos t, \quad x(t_0) = x_0$

Hinweis: Sie können Ihre Aussagen anhand der vergleichsweise einfach zu ermittelnden Lösung der Differentialgleichung überprüfen.

Aufgabe 4

Das Verhalten eines nichtlinearen zeitinvarianten Systems 2. Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned} \qquad \text{mit} \quad x(0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}$$

kann in der Umgebung einer Ruhelage x_R (d.h. $f(x_\mathrm{R}) = 0$) anhand des um die Ruhelage linearisierten Systems in Jordanform

$$\Delta\dot{x} = T^{-1} A\, T\, \Delta x = J\, \Delta x\,, \quad \Delta x = x - x_\mathrm{R}$$

untersucht werden. Bestimmen Sie für die folgenden charakteristischen Fälle die allgemeine Lösung der Trajektorienschar und vergleichen Sie diese mit dem Richtungsfeld (Phasenportrait) für die jeweils angegebenen Beispiele.

a) Verschiedene reelle Eigenwerte λ_1 und λ_2:

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Delta x$$

zum Beispiel: $J=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Doppelter reeller Eigenwert λ (diagonalisierbarer Fall):

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Delta x$$

zum Beispiel: $J=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Doppelter reeller Eigenwert λ (nicht diagonalisierbarer Fall):

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Delta x$$

zum Beispiel: $J=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) Konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda_{1/2} = a \pm j\, b$:

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Delta x$$

zum Beispiel: $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ordnen Sie dem beobachteten Verhalten einen der folgenden Begriffe zu: (in)stabiler Knotenpunkt, Sattelpunkt, (in)stabiler Strudelpunkt.