Nichtlineare Regelungssysteme 1 — Übung 3

Sommer 2015

Aufgabe 1

Gegeben ist ein System

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

das auf $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ für ein $L \geq 0$ und alle $t \geq t_0$ die Lipschitzbedingung

$$\|f(t, x(t))\|_2 \leq L \, \|x(t)\|_2$$

erfüllt.

a) Zeigen Sie

$$\left| \frac{d}{dt} \left(x^{\mathrm{T}}(t) x(t) \right) \right| \leq 2L \, \|x(t)\|_2^2 \, .$$

b) Zeigen Sie, daß für die Norm der Lösung stets

$$\|x_0\|_2 \, e^{-L\,(t-t_0)} \leq \|x(t)\|_2 \leq \|x_0\|_2 \, e^{L\,(t-t_0)} \, .$$

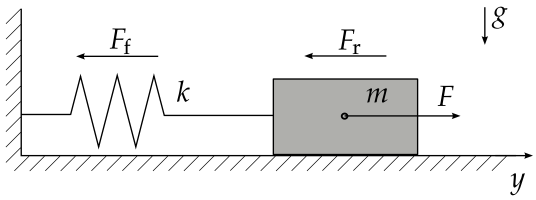
Betrachten Sie ein lineares System $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $x(t_0) = x_0$, das o.g. Lipschitz-Bedingung erfüllt.

c) Kann die Lösung des linearen Systems in endlicher Zeit in den Ursprung konvergieren?

d) Kann die Lösung des linearen Systems in endlicher Zeit entweichen?

Aufgabe 2

Betrachten Sie folgendes Feder-Masse-System mit linearer Federkraft F_{f} und aufgeprägter Kraft F. Die Reibkraft F_{r} setzt sich aus einer statischen Coulombschen Gleitreibung $\mu_{\mathrm{k}} mg$ bzw. Haftreibung $\mu_{\mathrm{S}} mg$ und einem linear viskosen Anteil zusammen. Dabei sind alle Parameter als positiv anzusehen.



Es gilt

$$m\ddot{y} = -ky - c\dot{y} - \eta(y, \dot{y}) + F$$

mit

$$\eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_{\mathrm{k}} mg \; \mathrm{sign}(\dot{y}) & , \; |\dot{y}| > 0 \\ -ky & , \; \dot{y} = 0 \text{ und } |y| \leq \frac{\mu_{\mathrm{s}} mg}{k} \\ -\mu_{\mathrm{s}} mg \; \mathrm{sign}(y) & , \; \dot{y} = 0 \text{ und } |y| > \frac{\mu_{\mathrm{s}} mg}{k} \end{cases}$$

Betrachten Sie den Fall ohne äußere Kräfte F. Skizzieren und beurteilen Sie das Phasenportrait. Untersuchen Sie dazu das System in den gegebenen Intervallen des Definitionsbereichs. Wie groß darf die Auslenkung der Masse aus der Ruhe heraus höchstens sein, so daß sie ohne Gegenschwingen in eine Ruhelage einläuft? In welcher Zeit wird sie erreicht?