Nichtlineare Regelungssysteme 1 — Übung 4

Sommer 2018

Aufgabe 1

Gegeben ist ein nichtlineares Feder-Masse-Dämpfer-System

$$\ddot{y} + c(y) = u(\dot{y}), \quad y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0,$$

wobei $y(t)$ die Position der Masse m zur Zeit t ist, $u(\dot{y})$ ein geschwindigkeitsabhängiges Stellsignal und $c(y) = \frac{2}{\pi}\arctan(y)$ eine nichtlineare Federkraft. Die Masse m ist in u und c enthalten. Die Stellgröße u kann zur aktiven Dämpfung des schwingungsfähigen Systems eingesetzt werden.

Beurteilen Sie, ob im geschlossenen Regelkreis Grenzzyklen ausgeschlossen werden können, wenn

a) $u(t) \equiv 0$ (ohne aktive Dämpfung)

b) $u(t) = -k_0\dot{y}(t)$

c) $u(t) = -k_1\dot{y}(t) - k_2(\dot{y}(t))^3$

d) $u(t) = -(k - |y(t)|)\dot{y}(t)$

mit Koeffizienten $k_0, k_1, k_2 > 0$ und $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Wir betrachten das System

$$\dot{x} = -Q\,\phi(x)$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$. $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine symmetrische, positiv definite Matrix und $\phi(x)$ eine stetig differenzierbare, vektorwertige Funktion, deren i-te Komponente ϕ_i allein von x_i abhängt, also $\phi_i = \phi_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Außerdem gelte $\phi_i(0) = 0$ und $x_i\,\phi_i(x_i) > 0$ in einer Umgebung von $x_i = 0$.

a) Finden Sie mit der Methode des variablen Gradienten eine Lyapunov-Funktion, anhand derer ersichtlich ist, daß der Ursprung $x = 0$ asymptotisch stabil ist.

b) Unter welchen Bedingungen ist der Ursprung global asymptotisch stabil?

c) Untersuchen Sie das Beispiel

$$\phi_1(x_1) = x_1 - x_1^2, \qquad \phi_2(x_2) = x_2 + x_2^3, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei $V = V(x)$ eine positiv definite, stetig differenzierbare Lyapunov-Funktion, die für die Ableitung entlang der Lösung eines Systems die Ungleichung

$$\dot{V} \leq -\alpha\, V^{\beta}$$

für ein $\alpha > 0$ und $\beta \in (0, 1)$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass die Lösung des zugehörigen Systems in endlicher Zeit in den Ursprung konvergiert. Geben Sie eine obere Schranke für die Konvergenzzeit an.

Überprüfen Sie die Aussage am skalaren System $\dot{x} = -k\,\mathrm{sign}(x)$ mit $k > 0$ und $x(t_0) = x_0$.