Nichtlineare Regelungssysteme 1 — Übung 8

Sommer 2015

Aufgabe 1:

Das System

$$\dot{x} = A\,x + B\,u, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

soll mit einem linear quadratisch optimalen Regler (LQR) der Form

$$u = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P\,x$$

geregelt werden. Dabei sind die Matrizen $R^{\mathrm{T}} = R > 0$ und $Q^{\mathrm{T}} = Q \geq 0$ gegebenen und $P^{\mathrm{T}} = P > 0$ bestimmt sich als Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$P\,A + A^{\mathrm{T}}P + Q - P\,B\,R^{-1}B^{\mathrm{T}}P = 0\,.$$

Zeigen Sie unter Verwendung von $V(x) = x^{\mathrm{T}}P\,x$ als Kandidat für eine Lyapunov-Funktion, daß der Ursprung global asymptotisch stabil ist, wenn

a) $Q > 0$ oder

b) $Q = C^{\mathrm{T}}C$ und (C, A) beobachtbar ist.

Aufgabe 2:

Ein zeitvariantes lineares Modell eines einfachen elektrischen RLC-Netzwerks

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{L(t)}\,x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{C(t)}\,x_1 - \frac{R(t)}{L(t)}\,x_2\end{aligned}$$

enthält die zeitveränderlichen Größen Induktivität $L = L(t)$, Kapazität $C = C(t)$ und Widerstand $R = R(t)$. Sie seien stetig differenzierbare Funktionen der Zeit, die für alle $t \geq 0$ die Bedingungen $k_1 \leq L(t) \leq k_2$, $k_3 \leq C(t) \leq k_4$ und $k_5 \leq R(t) \leq k_6$ erfüllen, $k_i > 0$, $i = 1, \ldots, 6$.

a) Zeigen Sie, daß es für

$$V(x,t) = \left(R(t) + \frac{2L(t)}{R(t)C(t)}\right)x_1^2 + 2\,x_1x_2 + \frac{2}{R(t)}x_2^2$$

positiv definite Funktionen $V_1 = V_1(x)$ und $V_2 = V_2(x)$ so gibt, daß gilt:

$$V_1(x) \leq V(x,t) \leq V_2(x).$$

b) Verwenden Sie $V(x,t)$ als Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion. Geben Sie Bedingungen für $L = L(t)$, $C = C(t)$ und $R = R(t)$ an so, daß der Ursprung asymptotisch stabil ist.