Beiblatt 2: Rekursives Backstepping für Systeme in strict-feedback-form

Das System in strict-feedback-form sei in folgender Weise strukturiert

$$\left.\left.\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1,x_2) + g_2(x_1,x_2)x_3
\end{aligned}\right\}\Sigma_1 \\
\dot{x}_3 = f_3(x_1,x_2,x_3) + g_3(x_1,x_2,x_3)x_4
\right\}\Sigma_2 \\
\vdots \\
\dot{x}_k = f_k(x_1,x_2,\ldots,x_k) + g_k(x_1,x_2,\ldots,x_k)u
\right\}\Sigma_{k-1}$$

Wir nehmen an, wir haben eine Funktion $\alpha_1(x_1)$, $\alpha_1(0) = 0$, so, daß der Ursprung $x_1 = 0$ im System $\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)\alpha_1(x_1)$ global (lokal) asymptotisch stabile Ruhelage ist. Darüber hinaus sei hierzu eine Lyapunov-Funktion $V(x_1)$ für den geschlossenen Regelkreis gegeben.

Zunächst betrachten wir das System Σ_1 und wählen als Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion

$$V_{a,1}(x_1,x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2}(x_2 - \alpha_1(x_1))^2. \tag{1}$$

Die Ableitung entlang der Lösungstrajektorie von Σ_1 lautet dann

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{a,1}(x_1,x_2) = {} & \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1}\big(f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2\big) + \\
& (x_2 - \alpha_1(x_1))\left(f_2(x_1,x_2) + g_2(x_1,x_2)x_3 - \frac{\partial \alpha_1(x_1)}{\partial x_1}\big(f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2\big)\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

und nach kleineren Umformungen

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{a,1}(x_1,x_2) = {} & \underbrace{\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1}\big(f_1(x_1) + g_1(x_1)\alpha_1(x_1)\big)}_{\leq 0} + \\
& (x_2 - \alpha_1(x_1))\left(\underline{\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1}g_1(x_1) + f_2(x_1,x_2) + g_2(x_1,x_2)\alpha_2(x_1,x_2) - \frac{\partial \alpha_1(x_1)}{\partial x_1}\big(f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2\big)}\right) + \\
& \underbrace{(x_2 - \alpha_1(x_1))}_{\frac{\partial V_{a,1}(x_1,x_2)}{\partial x_2}} g_2(x_1,x_2)\big(x_3 - \alpha_2(x_1,x_2)\big)\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Der letzte Summand in (3) tritt nur auf, wenn $x_3 \neq \alpha_2(x_1,x_2)$. Bei der Stabilisierung des Systems Σ_1 mittels $x_3 = \alpha_2(x_1,x_2)$ tritt er also nicht auf. Für diese Stabilisierung wählen wir $\alpha_2(x_1,x_2)$ so, daß der in (3) unterstrichene Term resultiert in: $-K_1(x_2 - \alpha_1(x_1)),\ K_1 > 0$.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_2(x_1,x_2)) = {} & \frac{1}{g_2(x_1,x_2)}\Big(-K_1\,(x_2 - \alpha_1(x_1)) - f_2(x_1,x_2) \\
& + \frac{\partial \alpha_1(x_1)}{\partial x_1}\big(f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2\big) - \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1}g_1(x_1)\Big)
\end{aligned} \tag{4}$$

und für $x_3 = \alpha_2(x_1,x_2)$ ist $V_{a,1}(x_1,x_2)$ eine Lyapunov-Funktion des geschlossenen Regelkreises bzgl. System Σ_1. Denn für $x_3 = \alpha_2(x_1,x_2)$ wird aus Gleichung (3) nunmehr

$$\dot{V}_{a,1}(x_1,x_2) = \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1}\big(f_1(x_1) + g_1(x_1)\alpha_1(x_1)\big) - K_1(x_2 - \alpha_1(x_1))^2 < 0 \quad \forall (x_1,x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}\,. \tag{5}$$

Wir erweitern das System Σ_1 nun auf Σ_2 und wählen als Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion

$$V_{a,2}(x_1,x_2,x_3) = V_{a,1}(x_1,x_2) + \frac{1}{2}(x_3 - \alpha_2(x_1,x_2))^2 \tag{6}$$

und verwenden im weiteren die Abkürzung $w_j = (x_1,\ldots,x_j)$. Demnach schreiben wir (6) als

$$V_{a,2}(w_3) = V_{a,1}(w_2) + \frac{1}{2}(x_3 - \alpha_2(w_2))^2. \tag{7}$$

Die Ableitung entlang der Lösungstrajektorie von Σ_2 lautet dann

$$\begin{aligned}\dot V_{a,2}(w_3) = \dot V_{a,1}(w_2) + (x_3 - \alpha_2(w_2))\Big(f_3(w_3) + g_3(w_3)x_4 - \\ \frac{\partial \alpha_2(w_2)}{\partial w_2}\big(\tilde f_2(w_2) + \tilde g_2(w_2)x_3\big)\Big), \quad \tilde f_2(w_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1)+g_1(x_1)x_2 \\ f_2(x_1,x_2)\end{pmatrix}, \tilde g_2(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2(x_1,x_2)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

Der Ausdruck $\dot V_{a,1}(w_2)$ folgt aus (3) unter Verwendung von $\alpha_2(x_1,x_2)$ nach Gleichung (4). In Gleichung (3) muß jedoch berücksichtigt werden, daß nunmehr $x_3 \neq \alpha_2(x_1,x_2)$. Man erhält also

$$\dot V_{a,1}(w_2) = \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1}\big(f_1(x_1) + g_1(x_1)\alpha_1(x_1)\big) - K_1(x_2 - \alpha_1(x_1))^2 + \frac{V_{a,1}(w_1,x_2)}{\partial x_2} g_2(w_2)\big(x_3 - \alpha_2(w_2)\big) \tag{9}$$

Analoges Vorgehen wie oben liefert dann:

$$\begin{aligned}\dot V_{a,2}(w_3) = \underbrace{\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1}\big(f_1(x_1) + g_1(x_1)\alpha_1(x_1)\big) - K_1(x_2 - \alpha_1(x_1))^2}_{\leq 0} + \\ (x_3 - \alpha_2(w_2))\underline{\left(\frac{\partial V_{a,1}(w_1,x_2)}{\partial x_2} g_2(w_2) + f_3(w_3) + g_3(w_3)\alpha_3(w_3) - \frac{\partial \alpha_2(w_2)}{\partial w_2}\big(\tilde f_2(w_2) + \tilde g_2(w_2)x_3\big)\right)} + \\ \underbrace{(x_3 - \alpha_2(w_2))}_{\frac{\partial V_{a,2}(w_2,x_3)}{\partial x_3}} g_3(w_3)\big(x_4 - \alpha_3(w_3)\big)\end{aligned} \tag{10}$$

Der letzte Summand in (10) tritt nur auf, wenn $x_4 \neq \alpha_3(w_3)$. Bei der Stabilisierung des Systems Σ_2 mittels $x_4 = \alpha_3(w_3)$ tritt er also nicht auf. Für diese Stabilisierung wählen wir $\alpha_3(w_3)$ so, daß der in (10) unterstrichene Term resultiert in: $-K_2(x_3 - \alpha_2(w_2)),\ K_2 > 0$.

Auf diese Weise erhalten wir

$$\alpha_3(w_3) = \frac{1}{g_3(w_3)}\Big(-K_2\,(x_3 - \alpha_2(w_2)) - f_3(w_3) + \frac{\partial \alpha_2(w_2)}{\partial w_2}\big(\tilde f_2(w_2) + \tilde g_2(w_2)x_3\big) - \frac{\partial V_{a,1}(w_1,x_2)}{\partial x_2} g_2(w_2)\Big). \tag{11}$$

Ein Vergleich mit den Schritten zuvor ergibt folgende Rekursion zur Bestimmung eines Reglers.

Rekursion: Bestimme die Ausdrücke $\alpha_j(w_j)$, $j=2,\ldots,k$ aus

$$\begin{aligned}\alpha_j(w_j)) = \frac{1}{g_j(w_j)}\Big(&-K_{j-1}(x_j - \alpha_{j-1}(w_{j-1})) - f_j(w_j) \\ &+ \frac{\partial \alpha_{j-1}(w_{j-1})}{\partial w_{j-1}}\big(\tilde f_{j-1}(w_{j-1}) + \tilde g_{j-1}(w_{j-1})x_j\big) - \frac{\partial V_{a,j-2}(w_{j-2},x_{j-1})}{\partial x_{j-1}} g_{j-1}(w_{j-1})\Big),\end{aligned} \tag{12}$$

wobei $K_{j-1} > 0$ und

$$\tilde{f}_{j-1}(w_{j-1}) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{j-2}(w_{j-2}) + \tilde{g}_{j-2}(w_{j-2})x_{j-1} \\ f_{j-1}(w_{j-2}, x_{j-1}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_{j-1}(w_{j-1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_{j-1}(w_{j-2}, x_{j-1}) \end{pmatrix},$$
$$V_{a,j-1}(w_j) = V_{a,j-2}(w_{j-1}) + \frac{1}{2}\left(x_j - \alpha_{j-1}(w_{j-1})\right)^2$$

mit Startwerten $\tilde{f}_1(w_1) = f_1(w_1),\ \tilde{g}_1(w_1) = g_1(w_1)$ und $V_{a,0} = V$.

Das Regelgesetz folgt am Ende der Rekursion zu: $\quad u = \alpha_k(w_k) = \alpha_k(x_1, \ldots, x_k)$.