Beiblatt 3: Rekursives Backstepping für Systeme in pure-feedback-form

Wir strukturieren das System in pure-feedback-form zunächst in folgender Weise

$$\left.\left.\left.\begin{array}{l}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)\end{array}\right\}\Sigma_1 \atop \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)\right\}\Sigma_2 \atop \begin{array}{l}\vdots\\ \dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k, u)\end{array}\right\}\Sigma_{k-1}$$

Wir nehmen an, wir haben eine Funktion $\alpha_1(x_1)$, $\alpha_1(0) = 0$, so, daß der Ursprung $x_1 = 0$ im System $\dot{x}_1 = f_1(x_1, \alpha_1(x_1))$ global (lokal) asymptotisch stabile Ruhelage ist. Darüber hinaus sei hierzu eine Lyapunov-Funktion $V(x_1)$ für den geschlossenen Regelkreis gegeben.

Zunächst betrachten wir das System Σ_1 und wählen als Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion

$$V_{a,1}(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2}(x_2 - \alpha_1(x_1))^2. \tag{1}$$

Die Ableitung entlang der Lösungstrajektorie von Σ_1 lautet dann

$$\dot{V}_{a,1}(x_1, x_2) = \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + (x_2 - \alpha_1(x_1)) \left(f_2(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial \alpha_1(x_1)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) \right). \tag{2}$$

Um diese Beziehung mit der Stabilitätsaussage der Annahme verbinden zu können, verwenden wir die Hilfsgröße des verallgemeinerten Backsteppings (siehe Anhang des Beiblatts) und eliminieren in Gleichung (2) den Term $f_1(x_1, x_2)$. Ebenso eliminieren wir in (2) den Term $f_2(x_1, x_2, x_3)$. Mit den Gleichungen (16) und (17) aus dem Anhang folgt

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1, \alpha_1(x_1)) + G_1(x_1, x_2 - \alpha_1(x_1))\big(x_2 - \alpha_1(x_1)\big) \tag{3}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, x_2, \alpha_2(x_1, x_2)) + G_2(x_1, x_2, x_3 - \alpha_2(x_1, x_2))\big(x_3 - \alpha_2(x_1, x_2)\big) \tag{4}$$

und durch Einsetzen in (2) erhält man

$$\begin{aligned}\dot{V}_{a,1}(x_1, x_2) = &\underbrace{\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} f_1(x_1, \alpha_1(x_1))}_{\leq 0} + \\ &(x_2 - \alpha_1(x_1)) \left(\underline{\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} G_1(x_1, x_2 - \alpha_1(x_1)) + f_2(x_1, x_2, \alpha_2(x_1, x_2)) - \frac{\partial \alpha_1(x_1)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2)} \right) + \\ &\underbrace{(x_2 - \alpha_1(x_1))}_{\frac{\partial V_{a,1}(x_1, x_2)}{\partial x_2}} G_2(x_1, x_2, x_3 - \alpha_2(x_1, x_2))\big(x_3 - \alpha_2(x_1, x_2)\big).\end{aligned} \tag{5}$$

Der letzte Summand in (5) tritt nur auf, wenn $x_3 \neq \alpha_2(x_1, x_2)$. Bei der Stabilisierung des Systems Σ_1 mittels $x_3 = \alpha_2(x_1, x_2)$ tritt er also nicht auf. Für diese Stabilisierung wählen wir $\alpha_2(x_1, x_2)$ so, daß der in (5) unterstrichene Term resultiert in: $-K_1(x_2 - \alpha_1(x_1)),\ K_1 > 0$.

Damit gilt

$$f_2(x_1, x_2, \alpha_2(x_1, x_2)) = -K_1 \left(x_2 - \alpha_1(x_1)\right) + \frac{\partial \alpha_1(x_1)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) - \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} G_1(x_1, x_2 - \alpha_1(x_1)) \tag{6}$$

und für $x_3 = \alpha_2(x_1, x_2)$ ist $V_{a,1}(x_1, x_2)$ eine Lyapunov-Funktion des geschlossenen Regelkreises bzgl. System Σ_1. Denn für $x_3 = \alpha_2(x_1, x_2)$ wird aus Gleichung (5) nunmehr

$$\dot{V}_{a,1}(x_1, x_2) = \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} f_1(x_1, \alpha_1(x_1)) - K_1(x_2 - \alpha_1(x_1))^2 < 0 \quad \forall (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}. \tag{7}$$

Die gesuchte Funktion $\alpha_2(x_1, x_2)$ bestimmt man aus (6) mit dem Satz über implizite Funktionen.

Genau wie beim Backstepping für Systeme in strict-feedback-form erweitern wir das System Σ_1 nun auf das System Σ_2 und wählen als Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion

$$V_{a,2}(x_1,x_2,x_3) = V_{a,1}(x_1,x_2) + \frac{1}{2}(x_3 - \alpha_2(x_1,x_2))^2 \tag{8}$$

und verwenden im weiteren die Abkürzung $w_j = (x_1,\dots,x_j)$. Demnach schreiben wir (8) als

$$V_{a,2}(w_3) = V_{a,1}(w_2) + \frac{1}{2}(x_3 - \alpha_2(w_2))^2. \tag{9}$$

Die Ableitung entlang der Lösungstrajektorie von Σ_2 lautet dann

$$\dot V_{a,2}(w_3) = \dot V_{a,1}(w_2) + (x_3 - \alpha_2(w_2))\left(f_3(w_4) - \frac{\partial \alpha_2(w_2)}{\partial w_2}\bar f_2(w_3)\right), \quad \bar f_2(w_3) = \begin{pmatrix} f_1(w_2) \\ f_2(w_3)\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Der Ausdruck $\dot V_{a,1}(w_2)$ folgt aus Gleichung (5) unter Verwendung der eben bestimmten Funktion $\alpha_2(x_1,x_2)$. In (5) muß jedoch berücksichtigt werden, daß nun $x_3 \neq \alpha_2(x_1,x_2)$. Man erhält also

$$\dot V_{a,1}(w_2) = \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} f_1(x_1,\alpha_1(x_1)) - K_1(x_2-\alpha_1(x_1))^2 + \frac{V_{a,1}(w_1,x_2)}{\partial x_2} G_2(w_2, x_3-\alpha_2(w_2))\big(x_3-\alpha_2(w_2)\big) \tag{11}$$

Nun drücken wir noch $f_3(w_4)$ mit der Hilfsgröße aus dem Anhang des Beiblatts aus und erhalten:

$$\begin{aligned}\dot V_{a,2}(w_3) = &\underbrace{\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} f_1(x_1,\alpha_1(x_1)) - K_1(x_2-\alpha_1(x_1))^2}_{\leq 0} + \\ &(x_3-\alpha_2(w_2))\left(\underline{\frac{\partial V_{a,1}(w_1,x_2)}{\partial x_2} G_2(w_2,x_3-\alpha_2(w_2)) + f_3(w_3,\alpha_3(w_3)) - \frac{\partial\alpha_2(w_2)}{\partial w_2}\bar f_2(w_3)}\right) + \\ &\underbrace{(x_3-\alpha_2(w_2))}_{\frac{\partial V_{a,2}(w_2,x_3)}{\partial x_3}} G_3(w_3, x_4-\alpha_3(w_3))\big(x_4-\alpha_3(w_3)\big)\end{aligned} \tag{12}$$

Der letzte Summand in (12) tritt nur auf, wenn $x_4 \neq \alpha_3(w_3)$. Bei der Stabilisierung des Systems Σ_2 mittels $x_4 = \alpha_3(w_3)$ tritt er also nicht auf. Für diese Stabilisierung wählen wir $\alpha_3(w_3)$ so, daß der in (12) unterstrichene Term resultiert in: $\quad -K_2(x_3-\alpha_2(w_2)),\ K_2 > 0$.

Auf diese Weise erhalten wir

$$f_3(w_3,\alpha_3(w_3)) = -K_2\,(x_3-\alpha_2(w_2)) + \frac{\partial\alpha_2(w_2)}{\partial w_2}\bar f_2(w_3) - \frac{\partial V_{a,1}(x_1,x_2)}{\partial x_2} G_2(w_2,x_3-\alpha_2(w_2)) \tag{13}$$

und um $\alpha_3(w_3)$ zu bestimmen wenden wir auf (13) den Satz über implizite Funktionen an, usw. Damit ergibt sich folgende Rekursion zur Bestimmung eines Reglers.

Rekursion: Bestimme die Ausdrücke $\alpha_j(w_j)$, $j=2,\dots,k$ mit dem Satz über implizite Funktionen bzgl.

$$\begin{aligned}&f_j(w_j,\alpha_j(w_j)) = \\ &-K_{j-1}(x_j-\alpha_{j-1}(w_{j-1})) + \frac{\partial\alpha_{j-1}(w_{j-1})}{\partial w_{j-1}}\bar f_{j-1}(w_j) - \frac{\partial V_{a,j-2}(w_{j-2},x_{j-1})}{\partial x_{j-1}} G_{j-1}(w_{j-1},x_j-\alpha_{j-1}(w_{j-1})),\end{aligned} \tag{14}$$

wobei

$$\bar f_{j-1}(w_j) = \begin{pmatrix}\bar f_{j-2}(w_{j-1}) \\ f_{j-1}(w_j)\end{pmatrix}, \quad V_{a,j-1}(w_j) = V_{a,j-2}(w_{j-1}) + \frac{1}{2}\left(x_j - \alpha_{j-1}(w_{j-1})\right)^2$$

mit Startwerten $\bar f_1(w_2) = f_1(w_2)$ und $V_{a,0} = V$.

Das Regelgesetz folgt am Ende der Rekursion zu: $\quad u = \alpha_k(w_k) = \alpha_k(x_1,\dots,x_k)$.

Anhang: Motivation der Hilfsgröße beim verallgemeinerten und rekursiven Backstepping

Um die Stabilitätsaussage von einem vorherigen Rekursionsschritt verwenden zu können, kann man Ausdrücke der Form $f(x_1, x_2)$ in $f(x_1, \alpha(x_1))$ umformen. Dabei ist x_1 als vektorielle Größe, x_2 als skalare Größe aufzufassen. Definieren wir

$$g(\lambda) := f\big(x_1, (1-\lambda)\alpha(x_1) + \lambda x_2\big)$$

mit skalarem Parameter λ, dann folgt:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, \alpha(x_1)) = g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{dg}{d\lambda} d\lambda = \int_0^1 \left.\frac{\partial f(x_1, v)}{\partial v}\right|_{v=(1-\lambda)\alpha(x_1)+\lambda x_2} d\lambda \quad \big(x_2 - \alpha(x_1)\big)\,.$$

Wir haben also gezeigt, daß gilt:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, \alpha(x_1)) = G(x_1, x_2 - \alpha(x_1))\big(x_2 - \alpha(x_1)\big), \quad G(x_1, x_2) = \int_0^1 \left.\frac{\partial f(x_1, v)}{\partial v}\right|_{v=\alpha(x_1)+\lambda x_2} d\lambda\,. \tag{15}$$

Anwendung: Beim rekursiven Backstepping von Systemen in pure-feedback-form wendet man die Beziehung (15) auf Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1})$ an. Mit $w_i = (x_1, \ldots, x_i)$ erhält man somit

$$f_i(w_i, x_{i+1}) = f_i(w_i, \alpha_i(w_i)) + G_i(w_i, x_{i+1} - \alpha_i(w_i))\big(x_{i+1} - \alpha_i(w_i)\big) \tag{16}$$

mit

$$G_i(w_i, x_{i+1}) = \int_0^1 \left.\frac{\partial f_i(w_i, v)}{\partial v}\right|_{v=\alpha_i(w_i)+\lambda x_{i+1}} d\lambda \quad . \tag{17}$$