Beiblatt 4: Regelungsnormalform von LTI-Systemen (Wiederholung)

Wir betrachten die Zustandsgleichung eines SISO LTI-Systems der Form

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^n$, Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$ und Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$. LTI-Systeme sind bekanntlich genau dann steuerbar, wenn die Erreichbarkeitsmatrix (Steuerbarkeitsmatrix)

$$R = \Big(B,\, AB,\, A^2B,\, \dots,\, A^{n-1}B\Big)$$

vollen Rang hat. Im SISO-Fall muß dazu also R invertierbar sein bzw. $\det(R) \neq 0$ gelten.

In diesem Fall läßt sich das LTI-System mit Hilfe der Zustandstransformation $z = T\,x$ mit

$$T = \begin{pmatrix} q^{\mathrm{T}} \\ q^{\mathrm{T}}A \\ q^{\mathrm{T}}A^2 \\ \cdots \\ q^{\mathrm{T}}A^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q^{\mathrm{T}} = (0,\, \dots,\, 0,\, 1)\, R^{-1}$$

auf Regelungssnormalform transformieren:

$$\dot{z} = A_{\mathrm{R}}\, z + B_{\mathrm{R}}\, u$$

mit

$$A_{\mathrm{R}} = T\,A\,T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_{\mathrm{R}} = T\,B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist die Dynamikmatrix A_{R} dann eine Frobeniusmatrix (Begleitmatrix).

Die Transformationsmatrix T ist invertierbar, denn die Produktmatrix

$$T\,R = \begin{pmatrix} q^{\mathrm{T}}B & q^{\mathrm{T}}AB & \cdots & q^{\mathrm{T}}A^{n-2}B & q^{\mathrm{T}}A^{n-1}B \\ q^{\mathrm{T}}AB & q^{\mathrm{T}}A^2B & \cdots & q^{\mathrm{T}}A^{n-1}B & \star \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ q^{\mathrm{T}}A^{n-2}B & q^{\mathrm{T}}A^{n-1}B & \iddots & \iddots & \star \\ q^{\mathrm{T}}A^{n-1} & \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & \iddots & \star \\ 1 & \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}$$

hat genau dann vollen Rang, wenn R regulär ist.

In der Zustandsdarstellung in Regelungsnormalform erhält man mit der Eingangstransformation

$$u = (a_0,\, a_1,\, \cdots\, ,a_{n-1})\, T\,x + v = (a_0,\, a_1,\, \cdots\, ,a_{n-1})\; z + v$$

dann schließlich die sogenannte Brunovský-Normalform

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v\,.$$

Ist $y = z_1 = q^{\mathrm{T}}x$ der Ausgang des LTI-Systems, so erkennt man, daß das Übertragungsverhalten zwischen v und y einem n-fachen Integrierer entspricht. Von diesem Ausgang aus ist der Zustand (vollständig) beobachtbar, denn für diesen Ausgang fällt die Bebachtbarkeitsmatrix genau mit der Transformationsmatrix T zusammen; diese ist regulär, wie oben gezeigt.