Beibatt 5: Beweis des Satzes über die Zustandslinearisierbarkeit (SISO) [1]

notwendig ($\Leftarrow$): Wir nehmen also an, daß es in einer offenen Umgebung $\mathcal{D}$ eines Punktes $\bar{x}$ einen Diffeomorphismus in Form einer Zustandstransformation $z = \tau(x)$ sowie eine reguläre Eingangstransformation $u = \alpha(x) + \beta(x)\, v$ so gibt, daß das System in Brunovský-Form vorliegt:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v. \tag{1}$$

Man erkennt, daß der „Ausgang“ $y = z_1$ des System in Brunovský-Form den Relativgrad n aufweist. Mit der Invarianz des Relativgrads gegenüber Zustands- und Eingangstransformationen schließen wir, daß der „Ausgang“ $y = \tau_1(x)$ ebenso den Relativgrad n hat.

Demnach gilt

$$\mathcal{L}_g \tau_1 = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \tau_1 = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^2 \tau_1 = \cdots = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-2} \tau_1 = 0 \tag{2}$$

sowie

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1 \neq 0\,. \tag{3}$$

Die Gleichungen in (2) und (3) lassen sich mit dem Hilfssatz im Anhang des Beiblattes (siehe dazu auch die Bemerkung) in äquivalenter Weise umformen zu

$$\mathcal{L}_g \tau_1 = \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f g} \tau_1 = \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^2 g} \tau_1 = \ldots = \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^{n-2} g} \tau_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^k} \tau_1 = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2 \tag{4}$$

sowie

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^{n-1} g} \tau_1 \neq 0\,. \tag{5}$$

In Zusammenfassung gilt also

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^k g} \tau_1 & = & 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2 \\ \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^{n-1} g} \tau_1 & \neq & 0 \end{array} \right. \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \left(g,\ \mathrm{ad}_f g,\ \mathrm{ad}_f^2 g,\ \ldots\ , \mathrm{ad}_f^{n-2} g,\ \mathrm{ad}_f^{n-1} g \right) = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0,\ c(x)) \end{aligned} \tag{6}$$

für eine skalarwertige Funktion $c(x)$ mit $c(x) \neq 0$ in einer Umgebung von $\bar{x}$. Da die Zustandstransformation $z = \tau(x)$ nach Voraussetzung bereits vorliegt, ist mit $z_1 = \tau_1(x)$ bereits eine Lösung des homogenen Anteils der partiellen Differentialgleichung (6), d.h. zu

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} \left(g,\ \mathrm{ad}_f g,\ \mathrm{ad}_f^2 g,\ \ldots\ , \mathrm{ad}_f^{n-2} g \right) = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0) \tag{7}$$

gegeben. Nach dem Frobenius-Theorem ist die Distribution $\Delta = \mathrm{span}\left\{ g,\ \mathrm{ad}_f g,\ \mathrm{ad}_f^2 g,\ \ldots\ , \mathrm{ad}_f^{n-2} g \right\}$ also involutiv.

Es bleibt also noch zu zeigen, daß die Vektorfelder $g,\ \mathrm{ad}_f g,\ \mathrm{ad}_f^2 g,\ \ldots\ , \mathrm{ad}_f^{n-2} g,\ \mathrm{ad}_f^{n-1} g$ an jedem Punkt x in einer Umgebung um $\bar{x}$ linear unabhängig sind.

[1] Wir beweisen den Satz in Anlehnung an die Bücher von A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd. Edition, Springer, 2001 und R. Marino, P. Tomei, *Nonlinear Control Design*, Prentice Hall, 1995

In Anlehnung an die Idee für den Beweis der Regularität der Transformationsmatrix auf Regelungsnormalform im linearen Fall untersuchen wir das Matrizenprodukt $H(x)G(x)$ mit

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f \tau_1) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f^{n-2} \tau_1) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1) \end{pmatrix}, \quad G(x) = \left(g,\ \mathrm{ad}_f g,\ \dots,\mathrm{ad}_f^{n-2} g,\ \mathrm{ad}_f^{n-1} g\right). \tag{8}$$

Damit gilt zunächst

$$H(x)G(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_g \tau_1(x) & \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f g} \tau_1(x) & \cdots & \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^{n-2} g} \tau_1(x) & \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^{n-1} g} \tau_1(x) \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \tau_1(x) & \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f g} \mathcal{L}_f \tau_1(x) & \cdots & \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^{n-2} g} \mathcal{L}_f \tau_1(x) & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-2} \tau_1(x) & \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f g} \mathcal{L}_f^{n-2} \tau_1(x) & \iddots & & \vdots \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1(x) & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}. \tag{9}$$

An den Beziehungen (2) und (3) erkennen wir, daß die Voraussetzungen des Hilfssatzes für $\rho = n$ gegeben sind. Mit dem Hilfssatz folgern wir

$$H(x)G(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Diamond \\ \vdots & & \iddots & \Diamond & * \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \Diamond & \iddots & & \vdots \\ \Diamond & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wobei das Symbol $\Diamond$ für einen nicht verschwindenden Eintrag bzw. das Symbol * für einen nicht weiter spezifizierten Eintrag steht.

Folglich ist nach den an die Vektorfelder gestellten Glattheitsforderungen das Produkt $H(x)G(x)$ der Matrizen $H(x)$ und $G(x)$ für alle x in einer Umgebung von $\bar{x}$ regulär. Dies ist aber nur möglich, wenn die Matrizen $H(x)$ und $G(x)$ beide regulär sind. $G(x)$ ist für alle x in einer Umgebung von $\bar{x}$ aber genau dann regulär, wenn die Spalten von $G(x)$ linear unabhängig sind. Demnach gilt, daß die Vektorfelder $g,\ \mathrm{ad}_f g,\ \mathrm{ad}_f^2 g,\ \dots,\mathrm{ad}_f^{n-2} g,\ \mathrm{ad}_f^{n-1} g$ an jedem Punkt x in einer Umgebung um $\bar{x}$ linear unabhängig sind.

Damit ist der notwendige Teil des Satzes bewiesen.

hinreichend (⇒): Aus der Involutivität der Distribution $\Delta = \mathrm{span}\left\{g,\ \mathrm{ad}_f g,\ \mathrm{ad}_f^2 g,\ \dots,\mathrm{ad}_f^{n-2} g\right\}$ schließen wir mit Hilfe des Frobenius-Theorems auf die Existenz einer nicht-trivialen Lösung $\tau_1(x)$ der homogenen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x}\left(g,\ \mathrm{ad}_f g,\ \mathrm{ad}_f^2 g,\ \dots,\mathrm{ad}_f^{n-2} g\right) = (0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^k g} \tau_1 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \tag{11}$$

mit $\frac{\partial \tau_1}{\partial x} \neq 0$ in einer Umgebung von $\bar{x}$. Demzufolge steht der Gradient der Funktion τ_1 für alle x in einer Umgebung von $\bar{x}$ auf den entsprechenden $n-1$ Vektoren $g,\ \mathrm{ad}_f g,\ \mathrm{ad}_f^2 g,\ \dots,\mathrm{ad}_f^{n-2} g$ senkrecht. Jedoch kann der Gradient der Funktion τ_1 nicht (auch noch) auf $\mathrm{ad}_f^{n-1} g$ und damit auf allen Vektoren des $\mathbb{R}^n$ senkrecht stehen, denn die Vektoren g, $\mathrm{ad}_f g$, $\mathrm{ad}_f^2 g$, $\ldots$,$\mathrm{ad}_f^{n-1} g$ sind für $x = \bar{x}$ nach der zweiten Bedingung des Satzes linear unabhängig. Da aber $\frac{\partial \tau_1}{\partial x} \neq 0$ erhalten wir

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} \mathrm{ad}_f^{n-1} g = \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^{n-1} g} \tau_1 \neq 0\,. \tag{12}$$

Nach dem Hilfssatz folgt zunächst die Gültigkeit der Beziehungen in (2) und (3). Daher können wir den Hilfssatz abermals auf das Matrizenprodukt (9) anwenden und erhalten die Regularität der Produktmatrix gemäß (10). Damit ist aber notwendigerweise auch $H(\bar{x})$ regulär, d.h. die Zeilenvektoren

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f \tau_1), \ldots, \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f^{n-2} \tau_1), \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1)$$

sind in einer Umgebung von $\bar{x}$ linear unabhängig. Damit können wir nun eine Abbildung τ zur Wahl neuer Koordinaten definieren

$$z = \tau(x) := \begin{pmatrix} \tau_1(x) \\ \mathcal{L}_f \tau_1(x) \\ \mathcal{L}_f^2 \tau_1(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1(x) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f \tau_1) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f^{n-2} \tau_1) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1) \end{pmatrix},$$

denn als Folge des Satzes über implizite Funktionen ist die Abbildung τ lokal invertierbar und stetig differenzierbar, d.h. sie ist ein Diffeomorphismus.

Mit der so gewählten Zustandstranformation erzielt man offenbar die ersten $n-1$ Zeilen einer Brunovský-Form, also

$$\dot{z}_k = z_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{13}$$

Zum Erhalt der letzten Zeile einer Brunovský-Form differenzieren wir

$$z_n = \mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1$$

nach der Zeit. Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1)\,(f(x) + g(x)\,u) \\ &= \mathcal{L}_f^n \tau_1 + \left(\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1\right) u\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Da infolge (12) und dem Hilfssatz in einer Umgebung um $\bar{x}$ gilt, daß $\mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^{n-1} g} \tau_1 = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1 \neq 0$, können wir den Eingang u in eineindeutiger Weise (regulär) transformieren als

$$u = \underbrace{\frac{-\mathcal{L}_f^n \tau_1(x)}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1(x)}}_{=:\alpha(x)} + \underbrace{\frac{1}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \tau_1(x)}}_{=:\beta(x)} v \tag{15}$$

und erhalten damit die letzte Zeile eines Systems in Brunovský-Form, d.h.

$$\dot{z}_n = v\,. \tag{16}$$

Wir haben damit auch den hinreichenden Teil der Aussage des Satzes und damit auch den ganzen Satz bewiesen.

Hilfssatz. *Seien f, g glatte Vektorfelder mit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und h glatt mit $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ auf offener Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Zudem existiere eine ganze Zahl ρ mit $1 < \rho \leq n$, so daß $\forall x \in \mathcal{D}$ die beiden Bedingungen*

1. $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k h(x) = 0$, *für* $0 \leq k \leq \rho - 2$ *und*
2. $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\rho-1} h \neq 0$

erfüllt sind. Dann gilt $\forall x \in \mathcal{D}$

1. $\mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^j g} \mathcal{L}_f^i h(x) = 0$, *für i, j mit* $0 \leq i + j \leq \rho - 2$ *und*
2. $\mathcal{L}_{\mathrm{ad}_{(-f)}^j g} \mathcal{L}_f^i h(x) \neq 0$, *für i, j mit* $i + j = \rho - 1$.

Dieser Hilfssatz kann mit Hilfe der Jacobi-Identität und vollständiger Induktion bewiesen werden (siehe R. Marino, P. Tomei, *Nonlinear Control Design*, Prentice Hall, 1995, S. 348).

Bemerkung: Speziell für $i = 0$ und $k \leq \rho - 2$ erhalten wir $\forall x \in \mathcal{D}$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_g h(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^2 h(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^3 h(x) = \ldots = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k h(x) = 0 \\ \iff \quad & \mathcal{L}_g h(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f g} h(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^2 g} h(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^3 g} h(x) = \ldots = \mathcal{L}_{\mathrm{ad}_f^k g} h(x) = 0 \end{aligned}$$