Beiblatt 6: Beobachterentwurf für zeitvariante lineare Systeme

Hier soll kurz ein Satz angeführt werden, der das zeitvariante Pendant zur *Formel von Ackermann* darstellt, wie sie bei linearen zeitinvarianten SISO-Systemen häufig verwendet wird.

Satz 1 (Formel von Ackermann zur Polvorgabe für lineare zeitvariante Systeme)**.** *Seien $c(.)$ und $A(.)$ ausreichend oft differenzierbare (analytische) Funktionen der Zeit mit $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Die $n \times n$ Beobachtbarkeitsmatrix*

$$O(t) = \begin{pmatrix} M_A^0 c^{\mathrm{T}}(t) \\ M_A^1 c^{\mathrm{T}}(t) \\ \vdots \\ M_A^{n-1} c^{\mathrm{T}}(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} M_A^0 c^{\mathrm{T}}(t) &= c^{\mathrm{T}}(t)\,, \\ M_A^k c^{\mathrm{T}}(t) &= \left(M_A^{k-1} c^{\mathrm{T}}(t)\right) A(t) + \frac{d}{dt}\left(M_A^{k-1} c^{\mathrm{T}}(t)\right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

habe für alle Zeiten $t \geq 0$ vollen Rang n.

Damit ist eine $(n \times n)$-Matrix

$$V(t) = \left(N_A^0 q(t),\; N_A^1 q(t),\; \dots\;,\; N_A^{n-1} q(t)\right)$$

bestimmt durch

$$q(t) = O^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} N_A^0 q(t) &= q(t)\,, \\ N_A^k q(t) &= A(t)\left(N_A^{k-1} q(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(N_A^{k-1} q(t)\right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1\,. \end{aligned}$$

Wenn die Koeffizientenfunktionen von $V(t)$, $V^{-1}(t)$ als auch von $\dot{V}(t)$ für alle Zeiten $t \geq 0$ beschränkt sind, dann bewirkt die Wahl einer vektorwertigen Funktion

$$l(t) = -\left(l_0\, N_A^0 q(t) + l_1\, N_A^1 q(t) + \cdots + l_{n-1}\, N_A^{n-1} q(t) + N_A^n q(t)\right)$$

mit $l_i \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\lambda^n + l_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + l_1\lambda + l_0$$

ein Hurwitz-Polynom ist, eine exponentiell (asymptotisch) stabile Ruhelage $e = 0$ im System

$$\frac{d}{dt}e(t) = \left(A(t) + l(t)c^{\mathrm{T}}(t)\right) e(t)\,.$$