Beiblatt 7: Eingangs-/Ausgangs-Linearisierung im MIMO-Fall

Wir betrachten das zeitinvariante quadratische eingangsaffine MIMO-System der Form

$$\Sigma: \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^{p} g_j(x) u_j \\ y &= h(x)\,, \end{cases}$$

definiert auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktionen $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ sowie $g_j : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, p$, als auch die Ausgangsfunktionen $h_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ seien glatt.

Definition (Vektorrelativgrad)**.** *Der Ausgang y des Systems Σ hat an der Stelle $\bar{x} \in \mathcal{X}$ den Vektorrelativgrad $(r_1, \ldots, r_p)$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Alle x in einer offenen Umgebung von $\bar{x}$ erfüllen*

$$\mathcal{L}_{g_j} \mathcal{L}_f^k h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, p,\ \forall j = 1, \ldots, p,\ \forall k = 0, \ldots, r_i - 2\,.$$

2. *Die $p \times p$ Entkopplungsmatrix*

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f^{r_1 - 1} h_1(x) & \cdots & \mathcal{L}_{g_p} \mathcal{L}_f^{r_1 - 1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f^{r_p - 1} h_p(x) & \cdots & \mathcal{L}_{g_p} \mathcal{L}_f^{r_p - 1} h_p(x) \end{pmatrix}$$

   ist an der Stelle $\bar{x}$ regulär.

Die Sinnhaftigkeit dieser Definition wird schnell klar, wenn man die Ausgänge komponentenweise nach der Zeit differenziert gemäß

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{r_p} h_p(x) \end{pmatrix} + \Big(\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) \Big) u\,.$$

Bei wohldefiniertem Vektorrelativgrad ist die Entkopplungsmatrix invertierbar und das exakt eingangs-ausgangs-linearisierende Regelgesetz

$$u = \Big(\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) \Big)^{-1} \left(v - \begin{pmatrix} \mathcal{L}_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{r_p} h_p(x) \end{pmatrix} \right)$$

transformiert das System Σ in

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix},$$

d.h. in p verschiedene r_i-fach integrierende Teilsysteme, die getrennt voneinander mit den neuen Eingängen v_i geregelt werden können.