Regelungs- und Systemtechnik 1

Sommer 2021

Zur Lösung linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen

Wie in der Vorlesung betrachten wir lineare zeitinvariante Differentialgleichungen n-ter Ordnung der Form

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = \underbrace{b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)}_{=:\,\bar{u}(t)} \tag{1}$$

mit gegebenen Zahlen $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Unter der Annahme, daß der Eingang $u(t)$ für $t \geq 0$ bekannt ist und damit auch die Zeitableitungen, können wir die rechte Seite $\bar{u}(t)$ der Differentialgleichung (1) als bekannt voraussetzen.

Homogener Lösungsanteil

Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung zu (1), d.h. es gelte $\bar{u} \equiv 0$. In der homogenen Differentialgleichung führt der Lösungsansatz $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ auf

$$\underbrace{\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right)}_{=:\,p(\lambda)} e^{\lambda t} = 0\,.$$

Da der Ausdruck $e^{\lambda t}$ für beliebige Zeiten ungleich null ist, führt nur die Wahl von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ zu einer Lösung der homogenen Differentialgleichung. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Ist λ eine r-fache, reelle Nullstelle von $p(\lambda)$, so sind die Funktionen

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ t^2 e^{\lambda t},\ \ldots,\ t^{r-1}e^{\lambda t}$$

r linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

Fall 2: Ist $a \pm j\,b$ ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen von $p(\lambda)$ mit der Vielfachheit r, so sind die Funktionen

$$\begin{gathered} e^{at}\cos bt,\ e^{at}\sin bt \\ te^{at}\cos bt,\ te^{at}\sin bt \\ t^2e^{at}\cos bt,\ t^2e^{at}\sin bt \\ \vdots \\ t^{r-1}e^{at}\cos bt,\ t^{r-1}e^{at}\sin bt \end{gathered}$$

$2r$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

Insgesamt erhält man auf diese Weise n linear unabhängige Lösungsfunktionen $y_1, \ldots y_n$. Damit kann man zeigen, daß die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung von (1) sich als

$$y_{\text{hom}}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) \tag{2}$$

mit zunächst beliebigen Konstanten $c_i \in \mathbb{R}$ ausdrücken läßt.

Erzwungener Lösungsanteil

Die partikuläre Lösung, d.h. den erzwungenen Lösungsanteil y_{zw} von (1) erhalten wir mit Hilfe der Methode der *Variation der Konstanten*. Dazu machen wir den Ansatz

$$y_{\text{zw}}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t) \tag{3}$$

und setzen sukzessive in die Differentialgleichung (1) ein. Beachtet man, daß die Funktionen y_i die homogene Lösungen sind, so kann man folgende n Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dot{c}_1 y_1(t) & + & \dot{c}_2 y_2(t) & + & \cdots & + & \dot{c}_n y_n(t) & = & 0 \\
\dot{c}_1 \dot{y}_1(t) & + & \dot{c}_2 \dot{y}_2(t) & + & \cdots & + & \dot{c}_n \dot{y}_n(t) & = & 0 \\
\dot{c}_1 \ddot{y}_1(t) & + & \dot{c}_2 \ddot{y}_2(t) & + & \cdots & + & \dot{c}_n \ddot{y}_n(t) & = & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\dot{c}_1 y_1^{(n-2)}(t) & + & \dot{c}_2 y_2^{(n-2)}(t) & + & \cdots & + & \dot{c}_n y_n^{(n-2)}(t) & = & 0 \\
\dot{c}_1 y_1^{(n-1)}(t) & + & \dot{c}_2 y_2^{(n-1)}(t) & + & \cdots & + & \dot{c}_n y_n^{(n-1)}(t) & = & \bar{u}(t)
\end{array}$$

erhalten. Dieses lineare Geleichungssystem zur Bestimmung der Funktionen $\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t)$ kann auch mit der sogenannten Wronski-Matrix

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \cdots & \dot{y}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{als} \quad W(t) \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_{n-1}(t) \\ \dot{c}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{u}(t) \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden.

Es läßt sich nun zeigen, daß für die oben erhaltenen linear unabhängigen homogenen Lösungsanteile $y_1, \ldots, y_n$ die Wronski-Matrix für beliebige Zeiten $t \geq 0$ invertierbar ist. Damit kann man das lineare Gleichungssystem stets nach den Funktionen $\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t)$ auflösen und die gesuchten $c_i(t)$ einfach per elementweiser Integration bestimmen. Dabei sind die auftretenden n Integrationskonstanten frei wählbar (z.B. alle zu null setzen). Schließlich wird so eine erzwungene Lösung y_{zw} erhalten.

Wie man per Einsetzen in (1) verifiziert, lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1):

$$y(t) = \underbrace{c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)}_{= y_{\text{hom}}(t)} + y_{\text{zw}}(t), \tag{4}$$

wobei die Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ zur Anpassung an die Anfangswerte zur Verfügung stehen.

Quellen

[1] J. Jahn: *Kurzskriptum und Unterlagen zur Vorlesung „Mathematik für Ingenieure“*, Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Angewandte Mathematik II, 2002.