Regelungs- und Systemtechnik 1

Sommer 2014

Schwingungsfähiges P-T_2-Glied

Die Übertragungsfunktion des schwingungsfähigen P-T_2-Gliedes ist gegeben durch

$$G(s) = K \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 \, s + \omega_0^2}, \quad \zeta \in [0, 1)$$

Der Nenner des zugehörigen Frequenzgangs

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

läßt sich als Inverse des in der Vorlesung vorgestellten quadratischen Terms auffassen.

Amplitudengang

Der Amplitudengang

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \tag{1}$$

weist ein Maximum auf, vgl. Differentiation von (1) nach ω. Wegen der Monotonie reicht es, das Minimum von

$$f(x) = \left(1 - x^2\right)^2 + (2\zeta x)^2$$

mit $x := \frac{\omega}{\omega_0}$ durch Differentiation nach x zu bestimmen. Es zeigt sich, daß das Maximum des Amplitudengangs für $0 \le \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ an der Stelle

$$\omega_{\max} = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{mit dem Wert} \quad |G(j\omega_{\max})| = \frac{K}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

auftritt, bzw. in Dezibel:

$$|G(j\omega_{\max})|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \left(2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}\right).$$

Für $\zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ tritt keine Überhöhung des Amplitudengangs auf.

Beachte: Die Überhöhung des Amplitudengangs hat nichts zu tun mit dem Überschwingen der Sprungantwort des schwingungsfähigen P-T_2-Gliedes. Für $\zeta \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ schwingt die Sprungantwort nur einmal über, für $\zeta \in [1, \infty)$ gar nicht mehr.

Phasengang

Der Phasengang ergibt sich als aus dem quadratischen Term im Nenner als

$$\arg_s G(j\omega) = -\arg_s \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\, 2\,\zeta\, \frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Offenbar ist $\arg_s G(j\omega)$ stetig in ω.

Für $\frac{\omega}{\omega_0} < 1$ liegt $G(j\omega)$ im ersten oder vierten Quadranten der komplexen Zahlenebene, d.h. im Wertebereich der Arkustangens-Funktion. Für $\frac{\omega}{\omega_0} > 1$ liegt $G(j\omega)$ im dritten oder vierten Quadranten und damit nicht im Hauptwert der Arkustangens-Funktion. Jedoch führen Symmetrieüberlegungen auf:

$$\arg_s G(j\omega) = \begin{cases} -\arctan \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} & \text{für} \quad 0 \le \frac{\omega}{\omega_0} < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \\ -\pi + \arctan \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2-1} & \text{für} \quad 1 < \frac{\omega}{\omega_0} < \infty \end{cases} \tag{2}$$

Dieses Ergebnis entspricht (siehe Vorlesung): [1]

$$\arg_s G(j\omega) = -\arctan \frac{\frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} - \arctan \frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}. \tag{3}$$

An den Darstellungen (2) und (3) erkennt man, daß $\arg_s G(j\omega)$ an der Stelle $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ mit $-\frac{\pi}{2}$ stetig fortsetzbar ist.

Sprungantwort

Die Sprungantwort folgt aus der Rücktransformation von

$$Y(s) = G(s)\,\frac{1}{s} = K\,\frac{\omega_0^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_0\,s + \omega_0^2)s}$$

in den Zeitbereich. Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und der Korrespondenztabellen der Laplace-Transformation erhält man

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)\,\frac{1}{s}) = K\left(1 - e^{-\omega_0\zeta\,t}\left(\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t\right)\right)\right),\ \ t \ge 0$$

bzw. schließlich

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\omega_0\zeta\,t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t + \arccos\zeta\right)\right),\ \ t \ge 0$$

unter weiterer Vereinfachung mittels der Additionstheoreme.

Auf den nachfolgenden Seiten finden Sie zur Illustration des schwingungsfähigen P-T_2-Gliedes: Bode-Diagramm, Ortskurve, Polstellenlage und Sprungantwort für $K = 1$, $\omega_0 = 1$ und $\zeta \in [0,1]$ in Schritten.

---

[1] Darstellung (2) leitet sich aus Darstellung (3) unter Verwendung der folgenden Beziehung ab:

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan \frac{x+y}{1-xy} & \text{für} \quad xy < 1 \\ \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy} & \text{für} \quad xy > 1,\ x > 0 \\ -\pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy} & \text{für} \quad xy > 1,\ x < 0 \end{cases}$$

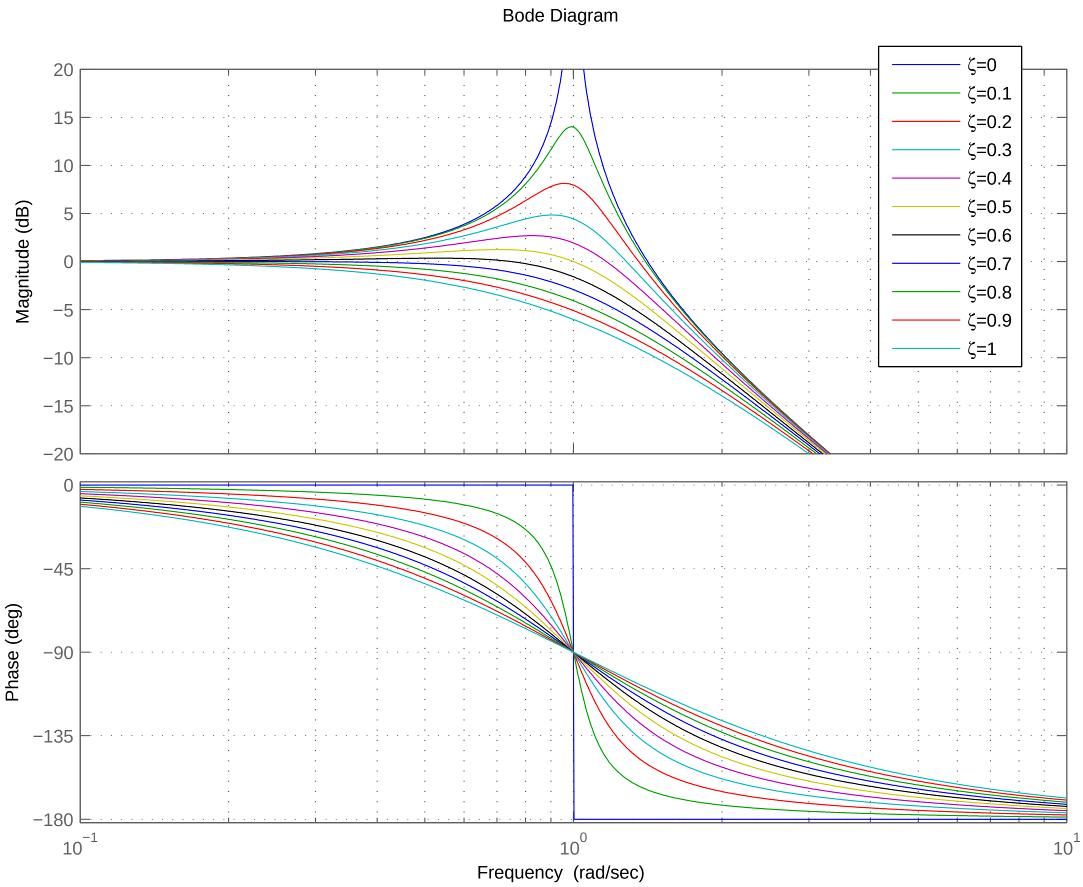

Abbildung 1: Bode-Diagramm des P-T_2-Gliedes für $\zeta \in [0, 1]$

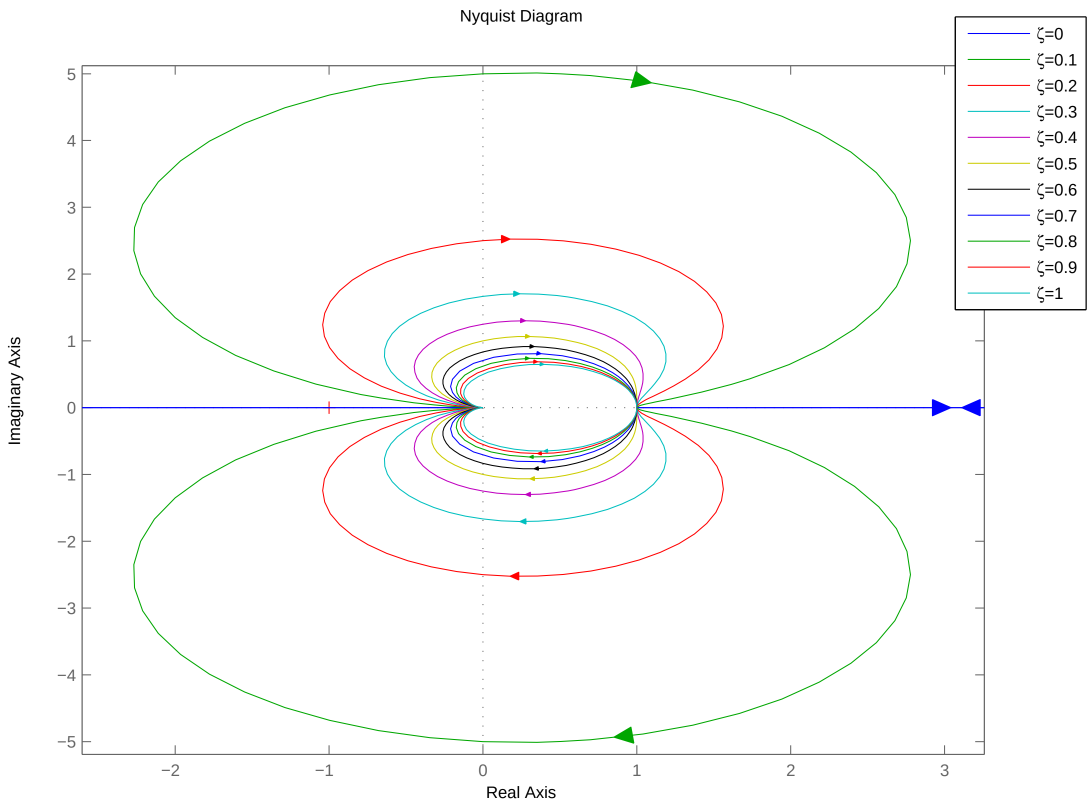

Abbildung 2: Ortskurve des P-T_2-Gliedes für $\zeta \in [0, 1]$

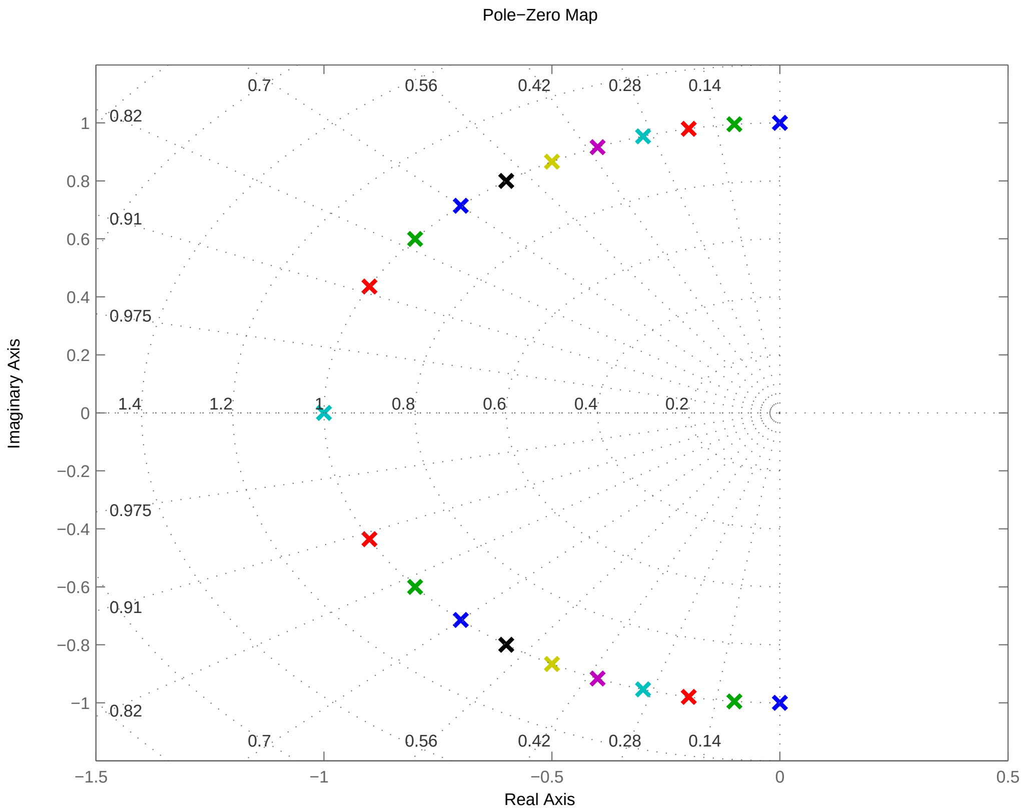

Abbildung 3: Pol-Nullstellendiagramm des P-T_2-Gliedes für $\zeta \in [0, 1]$

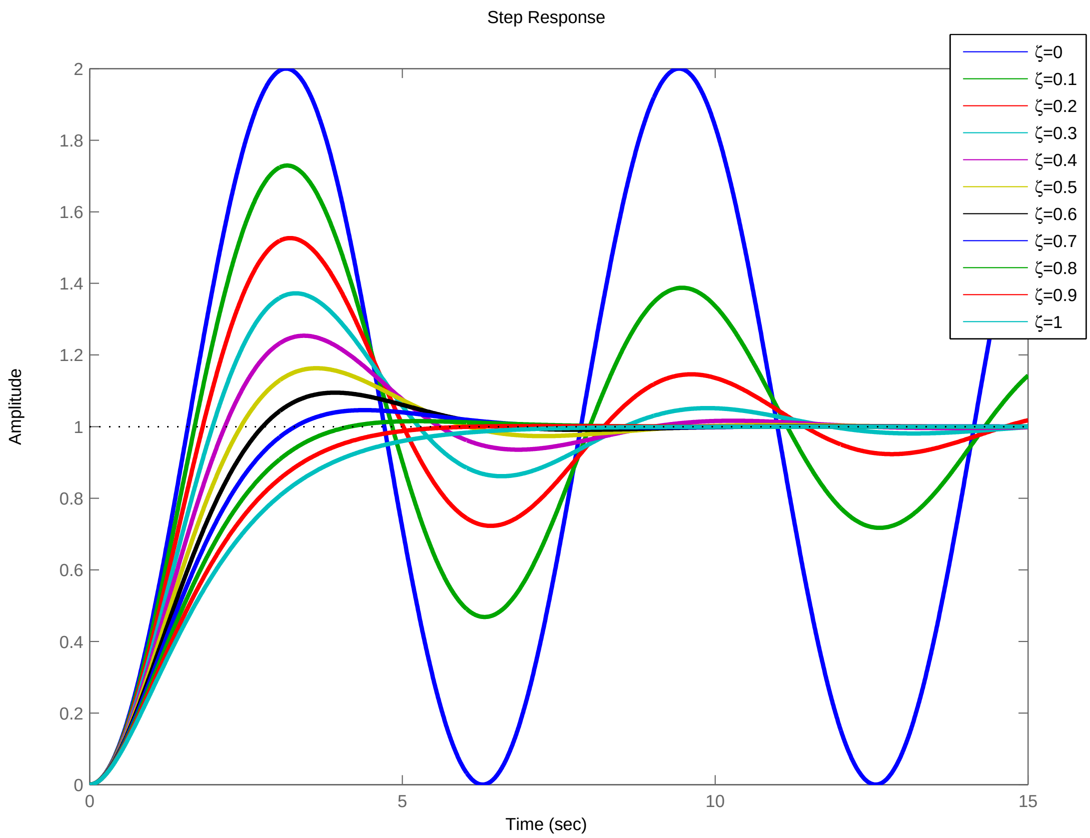

Abbildung 4: Sprungantwort des P-T_2-Gliedes für $\zeta \in [0, 1]$