Regelungs- und Systemtechnik 1

Sommer 2020

Frequenzgang einer Übertragungsfunktion

Wir betrachten ein System mit reellrationaler Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ unter periodischem Eingangssignal

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

mit Laplace-Transformierter

$$U(s) = \mathcal{L}\{u\} = \frac{1}{s - j\omega}$$

und interessieren uns für das resultierende Ausgangssignal $y(t)$ des Systems.

Mit $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ ergibt sich die Laplace-Transformierte des Ausgangs

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y\} = \frac{b(s)}{a(s)}\,U(s) + \frac{\tilde{b}(s)}{a(s)}\,.$$

Dabei stellt der erste Summand den erzwungenen Anteil und der zweite Summand, $\tilde{b}(s)/a(s)$, den homogenen Anteil an der Lösung dar. Das Polynom $\tilde{b}(s)$ resultiert aus den Anfangsbedingungen (siehe Abschnitt 3.2 der Vorlesung). Es gilt: $\deg(\tilde{b}(s)) < \deg(a(s))$.

Ist $\deg(b(s)) \geq \deg(a(s))$ (d.h. $m \geq n$, $G(s)$ nicht strikt-proper), so liefert eine Polynomdivision

$$b(s) = d(s)a(s) + c(s) \quad \text{mit} \quad \deg(c(s)) < \deg(a(s))$$

und wir erhalten unter Berücksichtigung von $U(s)$ zunächst

$$Y(s) = \left(d(s) + \frac{c(s)}{a(s)}\right)\frac{1}{s - j\omega} + \frac{\tilde{b}(s)}{a(s)}\,.$$

Der echtrationale Bruch $c(s)/a(s)$ kann nun in Partialbrüche zerlegt werden. Dabei sei N die Anzahl der verschiedenen Pole von $G(s)$ bzw. Wurzeln von $a(s) = (s - s_1)^{r_1} \cdots (s - s_N)^{r_N}$ und die Zahlen r_i, $i = 1, \ldots, N$ deren Vielfachheit. Unter der Voraussetzung, daß mit keiner Resonanzfrequenz angeregt wird, d.h. alle Pole s_i von $G(s)$ erfüllen $s_i \neq \pm j\omega$, erhält man die Beziehung

$$Y(s) = \left(d(s) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s - s_i)^k}\right)\frac{1}{s - j\omega} + \frac{\tilde{b}(s)}{a(s)} = d(s)\,\frac{1}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s - s_i)^k(s - j\omega)} + \frac{\tilde{b}(s)}{a(s)}\,.$$

In der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s - s_i)^k(s - j\omega)} &= \frac{c}{s - j\omega} + \frac{\beta_{i1}}{s - s_i} + \frac{\beta_{i2}}{(s - s_i)^2} + \cdots + \frac{\beta_{ik}}{(s - s_i)^k}\\ &= \frac{c(s - s_i)^k + \beta_{i1}(s - j\omega)(s - s_i)^{k-1} + \beta_{i2}(s - j\omega)(s - s_i)^{k-2} + \cdots + \beta_{ik}(s - j\omega)}{(s - s_i)^k(s - j\omega)}\end{aligned}$$

können wir die Konstante c aus dem Grenzwert $s \to j\omega$ bestimmen, d.h. $c = \frac{1}{(j\omega - s_i)^k}$, und es gilt:

$$\frac{1}{(s - s_i)^k(s - j\omega)} = \frac{1}{(j\omega - s_i)^k(s - j\omega)} + \frac{\beta_{i1}}{s - s_i} + \frac{\beta_{i2}}{(s - s_i)^2} + \cdots + \frac{\beta_{ik}}{(s - s_i)^k}$$

Durch Ersetzen des entsprechenden Ausdrucks in $Y(s)$ von oben folgt dann auch:

$$Y(s) = d(s)\,\frac{1}{s-j\omega} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r_i} \alpha_{ik}\left(\frac{1}{(j\omega-s_i)^k(s-j\omega)} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\beta_{il}}{(s-s_i)^l}\right) + \frac{\tilde{b}(s)}{a(s)}\,.$$

Umsortieren ergibt nun 3 Summanden:

$$Y(s) = \underbrace{d(s)\,\frac{1}{s-j\omega}}_{=A(s)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{\alpha_{ik}}{(j\omega-s_i)^k}\frac{1}{(s-j\omega)}}_{=B(s)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r_i}\sum_{l=1}^{k}\frac{\alpha_{ik}\beta_{il}}{(s-s_i)^l} + \frac{\tilde{b}(s)}{(s-s_1)^{r_1}\cdots(s-s_N)^{r_N}}}_{=C(s)}\,.$$

Es sind 3 Fälle zu unterscheiden:

- $m < n$: $G(s)$ ist strikt-proper, d.h. der Summand $A(s)$ tritt nicht auf.
- $m = n$: $G(s)$ ist proper, aber nicht strikt-proper, d.h. der Summand $d(s)$ in $A(s)$ ist konstant.
- $m > n$: $G(s)$ ist nicht-proper und $\deg(d(s)) \geq \deg(s-j\omega) = 1$. Erneute Polynomdivision liefert:

$$d(s) = \Delta(s)(s-j\omega) + \kappa \quad \text{mit} \quad \kappa = d(jw)\,.$$

Annahme: Der homogene Systemanteil sei exponentiell stabil, d.h. für alle Pole s_i sei $\mathrm{Re}(s_i) < 0$.

Dann gilt:

- $\lim\limits_{s\to 0} s\,C(s) = 0$, d.h. der entsprechende Anteil im Zeitbereich klingt exponentiell zu null ab.
- $\lim\limits_{s\to 0} s\,\Delta(s) = 0$, d.h. Auswirkungen des nicht-properen Anteils verschwinden.

Der für $t \to \infty$ im Zeitbereich nicht abklingende Anteil $y_\infty(t)$ hat also die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned} Y_\infty(s) &= \frac{d(j\omega)}{s-j\omega} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{\alpha_{ik}}{(j\omega-s_i)^k}\frac{1}{(s-j\omega)} = \underbrace{\left(d(j\omega) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{\alpha_{ik}}{(j\omega-s_i)^k}\right)}_{=G(j\omega)}\frac{1}{s-j\omega} \\ &= G(j\omega)\frac{1}{s-j\omega}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Ohne die Annahme $\mathrm{Re}(s_i) < 0$ bzgl. der Pole s_i bekommt man obige Darstellung nicht.

Daß dies nicht an den Anfangswerten liegt, zeigen wir anhand eines Beispiels. Sei $G(s) = 1/s$ und y erfülle die homogene Anfangsbedingung $y_0 = 0$, d.h. $\tilde{b}(s) \equiv 0$. Unter periodischer Erregung gilt dann für das Ausgangssignal

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s}\frac{1}{(s-j\omega)} = \frac{1}{j\omega(s-j\omega)} - \frac{1}{j\omega\,s} \\ &= G(j\omega)\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{j\omega}\frac{1}{s} \end{aligned}$$

Für sinusförmige Erregung $u(t) = \sin\omega t = \mathrm{Im}(e^{j\omega t})$ klingt der zweite Summand nie ab. Dieser drückt sich im Zeitbereich als frequenzabhängige Verschiebung $\frac{1}{\omega}$ aus, denn:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{Im}\left(\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}\right) = \mathrm{Im}\left(\left|\frac{1}{j\omega}\right| e^{j(\omega t + \arg_s G(j\omega))} - \frac{1}{j\omega}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\omega}e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} + j\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\left(\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + j\,\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + j\right) \\ &= \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega}\,. \end{aligned}$$