

# Regelungs- und Systemtechnik 1

Sommer 11

## Rechenregeln zum Frequenzgang

Die hier notierten Rechenregeln für den Frequenzgang ergeben sich unmittelbar aus Rechenregeln für komplexe Zahlen und den Logarithmengesetzen.

Für eine Zahl  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(z) = a$  und  $\text{Im}(z) = b$  und der konjugiert komplexen Zahl  $\bar{z} = a - ib$  gilt:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (1) \qquad |z| = |\bar{z}|, \quad (3)$$

$$\arg(z) = \arctan \frac{b}{a} \quad (2) \qquad \arg(z) = -\arg(\bar{z}). \quad (4)$$

Mit den Logarithmengesetzen ergeben sich für den Frequenzgang  $G(j\omega)$  einer rational Übertragungsfunktion  $G(s)$  folgende Zusammenhänge:

$$20 \log |1/G(j\omega)| = -20 \log |G(j\omega)| \quad (5)$$

$$\arg_s (1/G(j\omega)) = -\arg_s (G(j\omega)) \quad (6)$$

$$20 \log |G_1(j\omega)G_2(j\omega)| = 20 \log |G_1(j\omega)| + 20 \log |G_2(j\omega)| \quad (7)$$

$$\arg_s (G_1(j\omega)G_2(j\omega)) = \arg_s (G_1(j\omega)) + \arg_s (G_2(j\omega)) \quad (8)$$

## Zur Maßeinheit Dezibel (dB)

Ein Dezibel (dB) ist *ein zehntel Bel (B)*, benannt nach dem britischen Sprechtherapeut, Erfinder und Unternehmer Alexander G. Bell. Das Bel ist eine (dekadisch) logarithmische Maßeinheit (Hilfsgröße) für die Kennzeichnung des Verhältnisses zweier Leistungs- oder Energiegrößen  $P$ :

$$L = \log \frac{P_y}{P_u} \text{ B} = 10 \log \frac{P_y}{P_u} \text{ dB}$$

Bei linearen Systemen verhalten sich die Leistungs- bzw. Energiegrößen proportional zu den Quadraten der einwirkenden Effektivwerte der Feldgrößen  $u$  und  $y$ . Damit erhalten wir

$$L = 10 \log \frac{P_y}{P_u} \text{ dB} = 10 \log \frac{y^2}{u^2} \text{ dB} = 20 \log \frac{y}{u} \text{ dB}$$

Da der Betrag der Übertragungsfunktion  $G(s)$  an der Stelle  $s = j\omega_0$  das Verhältnis der Amplituden des Ausgangs-  $y(t)$  und Eingangssignals  $u(t) = A \sin(\omega_0 t)$  angibt (s. Beiblatt „Frequenzgang“), ist diese Hilfsgröße ein geeignetes Maß.

$ G(j\omega) $	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	5	10	100
$ G(j\omega) _{\text{dB}}$	-40	-20	-14	-6	-3	0	3	6	14	20	40

Quelle und vertiefte Betrachtungen:

Uwe Siart, *Das Dezibel – Definition und Anwendung*, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, TU München:  
<http://www.siart.de/lehre/dezibel.pdf>