Beiblatt 1: zur Lösung linearer Systeme

Für lineare Systeme

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

mit $A(t)$ stückweise stetig in t konvergiert die Picard-Iteration

$$\begin{aligned}
x^0(t) &= x_0 \\
x^1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)x^0(\tau_1)\,d\tau_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)x_0\,d\tau_1 = \left(I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\,d\tau_1\right) x_0 \\
x^2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)x^1(\tau_1)\,d\tau_1 = \left(I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\,d\tau_2\,d\tau_1\right) x_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

gegen die eindeutige Lösung. Sie ergibt sich demnach über die Reihe

$$x(t) = \underbrace{\left(I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\,d\tau_2\,d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3)\,d\tau_3\,d\tau_2\,d\tau_1 + \cdots\right)}_{=:\,\Phi(t,t_0)} x_0\,,$$

die sogenannte Peano-Baker-Reihe für die Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0)$.
Wenn die Matrix $A(t)$ mit ihrem Integral kommutiert, d.h. wenn gilt

$$A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\,A(t)\,,$$

so kann die Peano-Baker-Reihe kompakter geschrieben werden[1]:

$$\begin{aligned}
\Phi(t,t_0) &= I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\,d\tau_2\,d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3)\,d\tau_3\,d\tau_2\,d\tau_1 + \cdots \\
&= I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\,d\tau_2\,A(\tau_1)\right) d\tau_1 + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{\tau_1}\left(\int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3)\,d\tau_3\,A(\tau_2)\right) d\tau_2\,A(\tau_1)\right) d\tau_1 + \cdots \\
&= I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\,d\tau_1 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau_1}\left(\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\,d\tau_2\right)^2 d\tau_1 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{\tau_1}\frac{d}{d\tau_2}\left(\int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3)\,d\tau_3\right)^2 d\tau_2\,A(\tau_1)\right) d\tau_1 + \cdots \\
&= I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\,d\tau_1 + \frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right)^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\,d\tau_2\right)^2 A(\tau_1)d\tau_1 + \cdots \\
&= I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\,d\tau_1 + \frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau_1}\left(\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\,d\tau_2\right)^3 d\tau_1 + \cdots \\
&= I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\,d\tau_1 + \frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right)^k + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right)^k = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}\,.
\end{aligned}$$

Die Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0)$ folgt im kommutativen Fall also aus einer Matrixexponentialfunktion.

[1] Benoit Boulet, Linear Systems. Course Notes, McGill University, Montréal, Canada