Beiblatt 12: zur Steuerbarkeit des erweiterten Systems bei PI-Zustandsreglern

Wir betrachten das um einen Integrierer erweiterte SISO-LTI-System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{\mathrm{R}}(t) \\ \dot{x}_{\mathrm{I}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{R}} & 0 \\ -C_{\mathrm{R}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\mathrm{R}}(t) \\ x_{\mathrm{I}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{\mathrm{R}} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \tag{1}$$

der Einfachheit halber mit Originalsystem in Regelungsnormalform, da wir das Paar (A, B) als steuerbar annehmen. Die Matrizen haben die Dimensionen $A_{\mathrm{R}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_{\mathrm{R}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $C_{\mathrm{R}} \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

Wir überprüfen nun die Steuerbarkeit des erweiterten Systems (1). Hierzu verwenden wir den PBH-Linkseigenvektortest und fragen nach den Bedingungen, unter denen das System (1) nicht steuerbar ist: System (1) ist *nicht steuerbar*, wenn wir zu einem $\lambda \in \mathbb{C}$ einen Vektor $v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ finden mit

$$v^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A_{\mathrm{R}} & 0 \\ -C_{\mathrm{R}} & 0 \end{pmatrix} = v^{\mathrm{T}}\lambda \quad \text{und} \quad v^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{R}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Schreiben wir $v^{\mathrm{T}} = (v_1^{\mathrm{T}}, v_2)$, so erhalten wir die äquivalenten Beziehungen

$$\begin{cases} v_1^{\mathrm{T}} A_{\mathrm{R}} &= v_1^{\mathrm{T}}\lambda + v_2 C_{\mathrm{R}} \\ \lambda v &= 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad v_1^{\mathrm{T}} B_{\mathrm{R}} = 0\,. \tag{2}$$

Aus $v \neq 0$ folgt mit (2) notwendigerweise $\lambda = 0$. Die Bedingungen in (2) lassen sich also als

$$\bar{v}_1^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A_{\mathrm{R}} & B_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\mathrm{R}} & 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}} \\ B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} C_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

zusammenfassen, wobei wir vereinfachend $\bar{v}_1 = \frac{1}{v_2} v_1$ schreiben können, denn $v_2 \neq 0$.

Bedingung (3) läßt sich, da A_{R} und B_{R} in Regelungsnormalform vorliegen, als folgendes lineares Gleichungssystem aufschreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & \ddots & 1 & -a_{n-1} \\ & & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{A}} \begin{pmatrix} \bar{v}_{1,1} \\ \bar{v}_{1,2} \\ \bar{v}_{1,3} \\ \vdots \\ \bar{v}_{1,n-2} \\ \bar{v}_{1,n-1} \\ \bar{v}_{1,n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_{\mathrm{R},1} \\ C_{\mathrm{R},2} \\ C_{\mathrm{R},3} \\ \vdots \\ C_{\mathrm{R},n-1} \\ C_{\mathrm{R},n} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{C}}.$$

Dieses Gleichungssystem ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$\mathrm{Rang}(\bar{A}) = \mathrm{Rang}(\bar{A}|\bar{C})\,.$$

Offensichtlich ist der Rang der $(n+1) \times n$ Matrix $\bar{A}$ gleich n. Der Rang von $(\bar{A}|\bar{C})$ ist aber nur dann gleich n, wenn $C_{\mathrm{R},1} = 0$. Nur im Fall $C_{\mathrm{R},1} = 0$ hat das lineare Gleichungssystem eine Lösung. D.h. trotz steuerbaren Paars (A, B) hat man mit (1) dennoch ein *nicht steuerbares* System vorliegen.

Zusammenfassend erhalten wir: Steuerbarkeit des Paars (A, B) impliziert Steuerbarkeit des erweiterten Systems (1) genau dann, wenn $C_{\mathrm{R},1} \neq 0$. Dies ist aber gerade die Voraussetzung, die wir neben (A, B) steuerbar beim Vorfilterentwurf zusätzlich einhalten mußten.