Beiblatt 13: Polvorgabe mit der Regelungsnormalform zeitvarianter linearer Systeme

Ähnlich dem Regelungsverfahren zur Polvorgabe bei zeitinvarianten, linearen SISO-Systemen läßt sich auch ein Polvorgaberegler für zeitvariante lineare Systeme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{1}$$

angeben.

Dazu prüft man zunächst, ob nach dem Kriterium von Silverman & Meadows Steuerbarkeit vorliegt. Zusätzlich fordert man jedoch, daß die Rangbedingung für die verallgemeinerte Steuerbarkeitsmatrix $R(t)$ für beliebige Zeiten $t \in [t_0, \infty]$ erfüllt ist (man spricht von gleichmäßg steuerbar), d.h.

$$\text{Rang}\underbrace{\left(N_A^0 B(t), N_A^1 B(t), N_A^2 B(t), \ldots, N_A^{n-1} B(t)\right)}_{=R(t)} = n, \quad \forall t \in [t_0, \infty]\,.$$

Dabei ist $N_A^0 B(t) = B(t)$ und für alle weiteren $N_A^k B(t)$ gilt:

$$\begin{aligned}
N_A^1 B(t) &= A(t)B(t) - \dot{B}(t) \\
N_A^2 B(t) &= A(t)\left(N_A^1 B(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(N_A^1 B(t)\right) \\
&\vdots \\
N_A^{n-1} B(t) &= A(t)\left(N_A^{n-2} B(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(N_A^{n-2} B(t)\right)
\end{aligned}$$

Vereinfachend (für SISO-Systeme) liegt gleichmäßige Steuerbarkeit vor, wenn die Determinante von $R(t)$ für alle Zeiten $t \in [t_0, \infty]$ ungleich null ist.

Ist das SISO-System (1) nun gleichmäßig steuerbar, dann existiert eine zeitvariante Transformationsmatrix $P_\mathrm{R}(t)$, die das System (1) auf die verallgemeinerte Regelungsnormalform

$$\dot{x}_\mathrm{R} = A_\mathrm{R}(t)x_\mathrm{R} + B_\mathrm{R}u \tag{2}$$

mit

$$A_\mathrm{R}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

überführt. Die Transformation berechnet sich nach folgender Vorschrift:

1. Bestimme alle Zeilenvektoren $t_i^\mathrm{T}(t)$, $i = 1, \ldots, n$ aus der Rekursion

   $$t_{i+1}^\mathrm{T}(t) = t_i^\mathrm{T}(t)A(t) + \dot{t}_i^\mathrm{T}(t) \quad \text{mit} \quad t_1^\mathrm{T}(t) := e_n^\mathrm{T} R^{-1}(t)\,,$$

   wobei e_n den n-ten Einheitsvektor bezeichnet.

2. Die Transformationsmatrix lautet dann:

$$P_\mathrm{R}(t) = \begin{pmatrix} t_1^\mathrm{T}(t) \\ t_2^\mathrm{T}(t) \\ \vdots \\ t_n^\mathrm{T}(t) \end{pmatrix} .$$

Es gilt die Zustandstransformation

$$x_\mathrm{R} = P_\mathrm{R}(t)x \quad \Longleftrightarrow \quad x = P_\mathrm{R}^{-1}(t)x_\mathrm{R} .$$

Die Matrix $A_\mathrm{R}(t)$ und der Vektor B_R folgen aus den Beziehungen

$$A_\mathrm{R}(t) = \left(P_\mathrm{R}(t)A(t) + \dot{P}_\mathrm{R}(t)\right) P_\mathrm{R}^{-1}(t) \quad \text{und} \quad B_\mathrm{R} = P_\mathrm{R}(t)B(t) .$$

Beachte: Die zeitvariante Transformation $P_\mathrm{R}(t)$ läßt die Stabilität des Systems (1) nicht in jedem Fall unberührt. Sind die Einträge in den Matrizen $P_\mathrm{R}(t)$, $P_\mathrm{R}^{-1}(t)$, $\dot{P}_\mathrm{R}(t)$ stetig und beschränkt für alle Zeiten $t \in [t_0, \infty]$ und ist $P_\mathrm{R}(t)$ für alle $t \in [t_0, \infty]$ invertierbar ($\det(P_\mathrm{R}(t)) \neq 0$, $\forall t \in [t_0, \infty]$), so berührt die Transformation die Stabilität des Systems nicht. Man spricht dann von einer Lyapunov-Transformation. Die Einhaltung dieser Bedingungen wollen wir im weiteren voraussetzen.

Ähnlich dem LTI-Fall kann ausgehend von der Regelungsnormalform (2), (3) ein Polvorgaberegler entworfen werden. Zur Kompensation der zeitvarianten Terme setzt man nun das zeitvariante Regelgesetz

$$\begin{aligned} u &= (a_0(t) - p_0,\ a_1(t) - p_1,\ \ldots,\ a_{n-1}(t) - p_{n-1})\, x_\mathrm{R} \\ &= (a_0(t) - p_0,\ a_1(t) - p_1,\ \ldots,\ a_{n-1}(t) - p_{n-1})\, P_\mathrm{R}(t)x \end{aligned} \tag{4}$$

an, womit das System im geschlossenen Regelkreis die Form

$$\dot{x}_\mathrm{R}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{pmatrix} x_\mathrm{R}(t)$$

annimmt und der geschlossene Regelkreis nunmehr eine zeitinvariante Dynamik aufweist. Da die Koeffzienten $p_i \in \mathbb{R}$ gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises sind, wählt man zur asymptotischen Stabilisierung der Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ die Koeffizienten p_i so, daß

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

mit Wunscheigenwerten λ_i (Polen), wobei natürlich $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ gelten muß.

Beispiel:

Wir betrachten das instabile zeitvariante System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2 & 0 \\ 0 & 2 & e^{-t} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u .$$

Die verallgemeinerte Steuerbarkeitsmatrix bestimmt sich als

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2e^{-t}+4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und hat wegen $\det(R(t)) = -4$ für alle $t \in [t_0, \infty]$ vollen Rang.

Die nach obiger Vorschrift berechnete Transformationsmatrix lautet dann

$$P_{\mathrm{R}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und ist offenbar für alle $t \in [t_0, \infty]$ beschränkt sowie von vollem Rang, d.h. invertierbar. Damit folgt

$$P_{\mathrm{R}}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ e^{-t} & -1-e^{-t} & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

eine ebenso für alle $t \in [t_0, \infty]$ beschränkte Matrix von vollem Rang. Bleibt noch zu kontrollieren, ob auch deren Zeitableitung für alle $t \in [t_0, \infty]$ beschränkt ist. Dies ist wegen

$$\dot{P}_{\mathrm{R}}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -e^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

offensichtlich.

Damit sind alle Voraussetzungen für eine stabilitätserhaltende Transformation erfüllt. Wir erhalten die Regelungsnormalform:

$$A_{\mathrm{R}}(t) = \left(P_{\mathrm{R}}(t)A(t) + \dot{P}_{\mathrm{R}}(t)\right) P_{\mathrm{R}}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5e^{-t} & -2-4e^{-t} & e^{-t}+3 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}}(t)B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_3 = -3$, so ist damit das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises festgelegt:

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6,$$

d.h. $p_0 = 6$, $p_1 = 11$ und $p_2 = 6$.

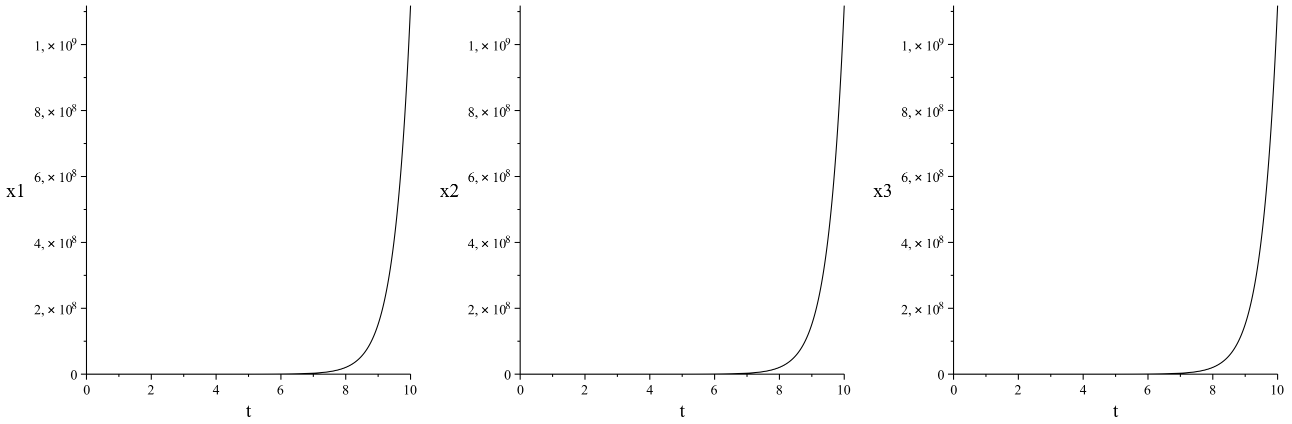
Das nach (4) resultierende, die Ruhelage $x = 0$ stabiliserende Regelgesetz lautet damit:

$$u(t) = \left(-9 - 3e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t},\ -e^{-t}-9,\ -e^{-t}-12\right) x(t).$$

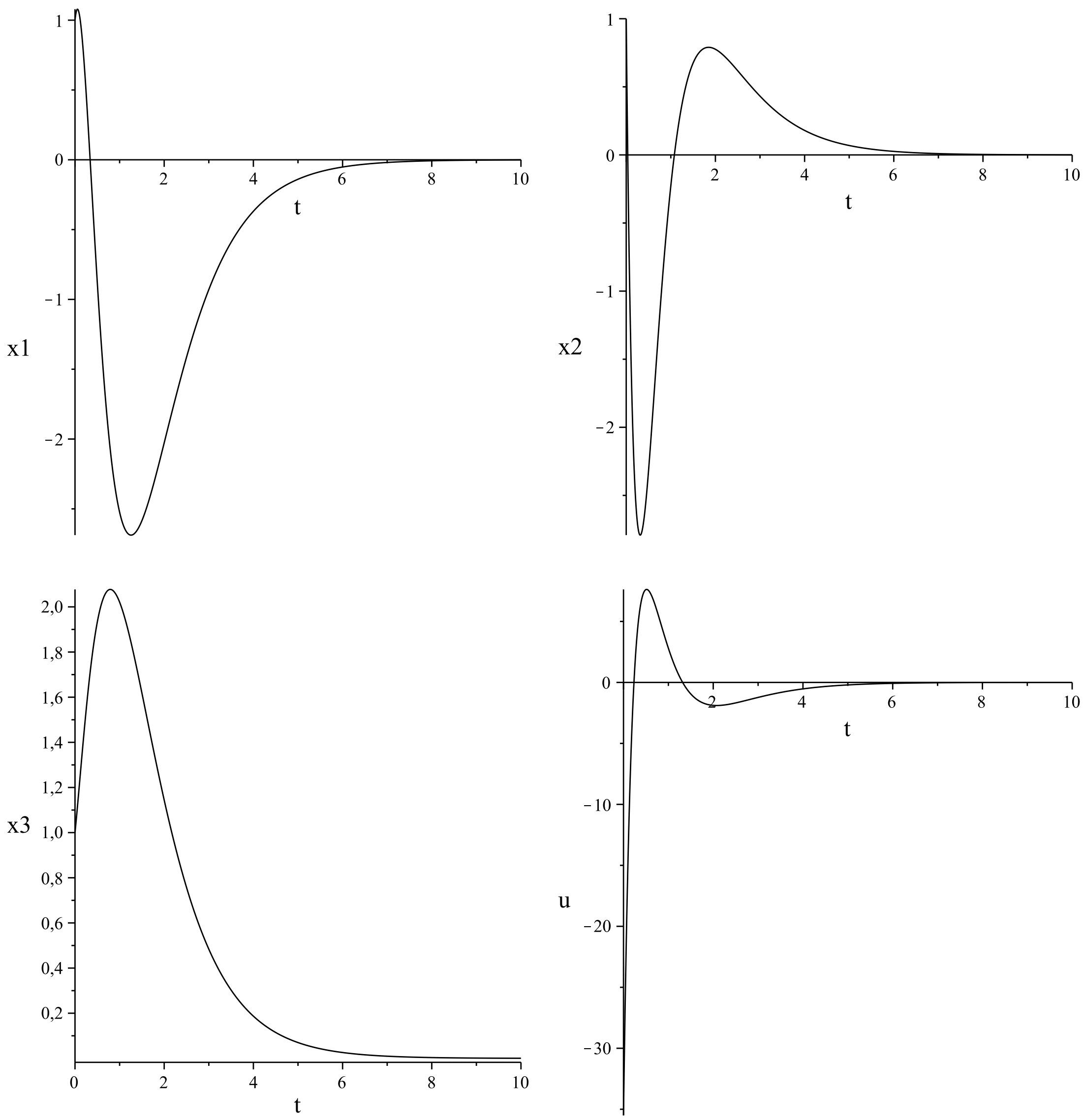
Dabei ist das Abklingen der zeitveränderlichen Terme ein Resultat der oben getroffenen Voraussetzungen, und für im Normsinne abnehmende $x(t)$ (asymptotisch stabil) nimmt mit der Zeit auch der Betrag der Stellgröße $u(t)$ ab.

In der Simulation (nächste Seite) wurde der Anfangszustand $x^{\mathrm{T}}(0) = (1, 1, 1)$ gewählt.

Das Ergebnis der Simulation ohne Regelung, d.h. $u \equiv 0$ (instabil):



Das Ergebnis der Simulation mit Regelung (stabil):



Die infolge der obigen Regelung erzwungene Stabilisierung der Ruhelage $x_{\mathrm{R}} = 0$ ist gut erkennbar. Dabei bleiben die Stellsignale beschränkt und konvergieren für große Zeiten gegen null.