Beiblatt 14: Steuerbarkeitskriterien

Der folgende Satz enthält eine Zusammenstellung von Steuerbarkeitskriterien für MIMO-LTI-Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{q\times q}$.

Satz (Steuerbarkeitskriterien für zeitkontinuierliche MIMO-LTI-Systeme)**.**
Die folgenden Aussagen sind einander äquivalent:

1. *Das Paar (A, B) ist steuerbar.*
2. *Die Matrix (Steuerbarkeits-Gramsche)*
$$W(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}}\tau} d\tau$$
ist für beliebige $t > 0$ positiv definit.
3. *Die Steuerbarkeitsmatrix (nach Kalman)*
$$R = (B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B)$$
hat (vollen) Rang n, d.h. es gilt: $\mathrm{Im}(R) = \mathbb{R}^n$.
4. *Die Matrix $(A-\lambda I,\ B)$ hat (vollen) Rang n für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.*
5. *Sei λ ein beliebiger Eigenwert von A. Jeder Linkseigenvektor v von A zum Eigenwert λ, d.h. $v^*A = v^*\lambda$, erfüllt $v^*B \neq 0$.*[1]
6. *Es gibt eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$ so, daß die Eigenwerte der Matrix $A + BF$ mittels F beliebig festgelegt werden können (mit der Einschränkung, daß komplexe Eigenwerte konjugiert komplex auftreten).*

□

Bemerkungen:

zu 4. Die Matrix $(A-\lambda I,\ B)$ hat sicher vollen Rang für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, die kein Eigenwert von A sind (λ ist keine Nullstelle von $\det(\lambda I - A)$). Man muß den Rang also nur für die Eigenwerte überprüfen.

zu 5. Damit ist beispielsweise leicht zu zeigen, daß das Paar $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ nicht steuerbar, das Paar $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ aber steuerbar ist.

zu 6. Die Matrix $A + BF$ ist die Dynamikmatrix des mit $u = F\,x$ geschlossenen Regelkreises.

[1] Der Ausdruck v^* bezeichnet den zu $v \in \mathbb{C}^n$ konjugiert komplex transponierten Vektor.