Beiblatt 3: zur Stabilität zeitkontinuierlicher LTI-Systeme

Wir überprüfen die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ von $\dot{x} = Ax$ auf Stabilität nach Lyapunov. Hierzu überlege man sich zunächst, daß Stabilitätseigenschaften unabhängig von der Wahl der Koordinaten sind. Daher können wir die Überprüfung der Stabilität vereinfachend anhand der Jordanschen Normalform von A vornehmen. Hierzu transformieren wir die Zustandsgleichung in den neuen Zustand $z = T^{-1}x$ und untersuchen die Stabilität der Ruhelage $z_\mathrm{R} = T^{-1}x_\mathrm{R} = 0$ des Systems

$$\dot{z}(t) = J\,z(t), \quad z(t_0) = z_0 = T\,x_0 \tag{1}$$

mit $J = T^{-1}A\,T$ als Jordanscher Normalform von A.

Die Lösung von (1) ist dann

$$z(t) = e^{J(t-t_0)}z_0 \quad \text{mit} \quad e^{J(t-t_0)} = \operatorname{diag}\left(e^{J_1(t-t_0)}, \ldots, e^{J_N(t-t_0)}\right) \tag{2}$$

und Diagonalblöcken

$$e^{J_\kappa(t-t_0)} = e^{\lambda_\kappa(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 & \frac{(t-t_0)^2}{2} & \frac{(t-t_0)^3}{6} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n_\kappa-1}}{(n_\kappa-1)!} \\ & 1 & t-t_0 & \frac{(t-t_0)^2}{2} & \ddots & \frac{(t-t_0)^{n_\kappa-2}}{(n_\kappa-2)!} \\ & & 1 & t-t_0 & \ddots & \frac{(t-t_0)^{n_\kappa-3}}{(n_\kappa-3)!} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & t-t_0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Wie aus der Vorlesung bekannt ist, können wir die Stabilität nun mit Hilfe einer Matrixnorm der Transitionsmatrix $e^{J(t-t_0)}$ gemäß (2) untersuchen. Der Einfachheit halber wählen wir die Maximumnorm $\|.\|_\infty$, d.h. wir bilden für jede Zeile der Transitionsmatrix die Summe der Beträge ihrer Elemente und nehmen das Maximum dieser Summen. Damit gilt

$$\left\|e^{J(t-t_0)}\right\|_\infty = \max\left\{\left\|e^{J_1(t-t_0)}\right\|_\infty, \ldots, \left\|e^{J_N(t-t_0)}\right\|_\infty\right\} \tag{4}$$

und es genügt offenbar Maximumnormen von Matrizen der Form (3) zu untersuchen. Getrennt in Real- und Imaginärteil lautet der Eigenwert $\lambda_\kappa = \alpha_\kappa + j\,\beta_\kappa$ und im Blick auf (3) folgt für $t \geq t_0$:

$$\left\|e^{J_\kappa(t-t_0)}\right\|_\infty = e^{\alpha_\kappa(t-t_0)}\left(1 + t - t_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2} + \frac{(t-t_0)^3}{6} + \cdots + \frac{(t-t_0)^{n_\kappa-1}}{(n_\kappa-1)!}\right). \tag{5}$$

Dies führt zu 4 Fällen:

1. **Für mindestens einen Eigenwert ist $\boldsymbol{\alpha_i > 0}$:** $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|e^{J_i(t-t_0)}\right\|_\infty \to \infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{t\to\infty}\left\|e^{J(t-t_0)}\right\|_\infty \to \infty$.
2. **Für alle Eigenwerte ist $\boldsymbol{\alpha_i < 0}$:** Der Ausdruck $e^{\alpha_i(t-t_0)}$ in (5) dominiert den mit der Zeit t wachsenden polynomialen Ausdruck in der Klammer. Folglich ist die Norm $\left\|e^{J_i(t-t_0)}\right\|_\infty$ für alle $i = 1, \ldots, N$ beschränkt und strebt gegen 0. Wegen (4) gilt diese Aussage auch für $\left\|e^{J(t-t_0)}\right\|_\infty$.
3. **Für alle Eigenwerte mit $\boldsymbol{\alpha_j = 0}$ ist $\boldsymbol{n_j = 1}$, für die übrigen gilt $\boldsymbol{\alpha_i < 0}$:** Für alle $\alpha_j = 0$ mit $n_j = 1$ folgt aus (5), daß $\left\|e^{J_j(t-t_0)}\right\|_\infty \leq 1$. Zu den übrigen Eigenwerten λ_i mit $\alpha_i < 0$ sind die Normen $\left\|e^{J_i(t-t_0)}\right\|_\infty$ beschränkt und konvergieren mit der Zeit t gegen 0 (siehe 2). Also ist $\left\|e^{J(t-t_0)}\right\|_\infty$ ebenso beschränkt, konvergiert mit wachsender Zeit t aber nicht gegen 0.
4. **Für mindestens einen Eigenwert mit $\boldsymbol{\alpha_j = 0}$ ist $\boldsymbol{n_j > 1}$, für die übrigen gilt $\boldsymbol{\alpha_i \leq 0}$:** Für alle $\alpha_j = 0$ mit $n_j > 1$ gilt $\left\|e^{J_j(t-t_0)}\right\|_\infty > \frac{(t-t_0)^{n_j-1}}{(n_j-1)!}$ und damit wiederum $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|e^{J(t-t_0)}\right\|_\infty \to \infty$.

Dies führt zu dem in der Vorlesung vorgestellten Stabilitätssatz über zeitkontinuierliche LTI-Systeme.