Beiblatt 4: Hurwitz-Kriterium

Wie bei der Überprüfung der BIBO-Stabilität mit Hilfe des Nennerpolynoms einer Übertragungsfunktion kann die asymptotische Stabilität von $\dot{x} = A\,x$ auch anhand eines Polynoms überprüft werden; hier anhand des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda\, I - A)$. Der Einfachheit halber verwenden wir die Notation der Vorlesung Regelungs- und Systemtechnik 1.

Wir untersuchen die Lage der Wurzeln (Nullstellen) eines Polynoms der Form

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

und wollen herausfinden, unter welchen Bedingungen diese ausschließlich negativen Realteil haben.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $a_n > 0$ annehmen. Denn im Fall $a_n < 0$ kann man $a(s)$ stets mit -1 multipizieren, was die Nullstellen des Polynoms $a(s)$ unberührt läßt.

Satz (Hurwitz-Kriterium)**.**

Das Polynom $a(s)$ hat genau dann ausschließlich Wurzeln in der offenen linken komplexen Halbebene, wenn

a) $a_i > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$

b) $\det(H_i) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ (Hauptabschnittsdeterminanten, führende Hauptminoren)

wobei mit $H_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ die n Hauptabschnittsmatrizen der Matrix

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

gemeint sind und in den Matrizen H_i die Parameter a_ν mit $\nu > n$ gleich Null zu setzen sind. □

Bemerkung:

1. Für Polynome bis zum Grad 2 genügt es, alleine Bedingung a) zu überprüfen. Denn alle Nullstellen des Polynoms $a(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ liegen in der linken offenen komplexen Halbebene genau dann, wenn alle Koeffizienten a_0, a_1, a_2 zugleich positives bzw. zugleich negatives Vorzeichen haben (wenn $a_2 < 0$, dann mit -1 multiplizieren).

   Ein Beispiel dafür, daß dies ab Grad 3 nicht mehr gilt, ist das Polynom $s^3 + s^2 + s + 1$. Die Bedingung a) ist zwar offensichtlich erfüllt, jedoch ist $\det(H_2) = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$ und damit Bedingung b) verletzt. In der Tat gilt $s^3 + s^2 + s + 1 = (s^2 + 1)(s + 1)$, d.h. das Polynom hat konjugiert komplexe Wurzeln auf der imaginären Achse.

2. In der Literatur finden sich eine Vielzahl von Varianten des Hurwitz-Kriteriums. Manchmal wird dort $a_n = 1$ vorausgesetzt oder die Numerierung der Koeffizienten ist anders (wie z.B. im Originalaufsatz von Adolf Hurwitz). Auch mag die Matrix H_n eine andere Gestalt haben, die dann jedoch zur oben angegebenen Matrix ähnlich ist. In jedem Fall sind diese Formulierungen einander äquivalent.

3. In der älteren Literatur findet sich für die oben genannte Matrix H_n auch die Bezeichnung *Hurwitz-Matrix*. Diese Bezeichnung gilt heutzutage als veraltet und führt in der heutigen Zeit häufig zu Mißverständnissen. Grund: Unter einer Hurwitz-Matrix versteht man nach moderner Lesart eine Matrix, deren sämtliche Eigenwerte negativen Realteil haben. Dies gilt für die Matrix H_n des obigen Satzes in den interessanten Fällen aber gerade nicht — warum?