Beiblatt 5: Intervall-Stabilität

In vielen Fällen sind die Koeffizienten der Systemmatrix A nur unzureichend genau bekannt. Sind diese Koeffizienten wenigstens konstant und weiß kann von ihnen obere und untere Schranken, so kann mit Hilfe der Kharitonov-Polynome Stabilität untersucht werden.

Definition (Kharitonov-Polynome)**.**

Sei $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_i \in [a_i^-, a_i^+]$. Die vier Polynome

$$\begin{aligned}
p_1(\lambda) &= a_0^- + a_1^-\lambda + a_2^+\lambda^2 + a_3^+\lambda^3 + a_4^-\lambda^4 + a_5^-\lambda^5 + a_6^+\lambda^6 + \ldots \\
p_2(\lambda) &= a_0^+ + a_1^+\lambda + a_2^-\lambda^2 + a_3^-\lambda^3 + a_4^+\lambda^4 + a_5^+\lambda^5 + a_6^-\lambda^6 + \ldots \\
p_3(\lambda) &= a_0^+ + a_1^-\lambda + a_2^-\lambda^2 + a_3^+\lambda^3 + a_4^+\lambda^4 + a_5^-\lambda^5 + a_6^-\lambda^6 + \ldots \\
p_4(\lambda) &= a_0^- + a_1^+\lambda + a_2^+\lambda^2 + a_3^-\lambda^3 + a_4^-\lambda^4 + a_5^+\lambda^5 + a_6^+\lambda^6 + \ldots
\end{aligned}$$

heißen Kharitonov-Polynome. □

Satz (Intervall-Stabilität)**.**

Für das LTI-System $\dot{x} = A\,x$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei das charakteristische Polynom

$$\det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n\,.$$

Das charakteristische Polynom $\det(\lambda I - A)$ ist für beliebige $a_i \in [a_i^-, a_i^+]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ein Hurwitz-Polynom, wenn alle vier zugehörigen Kharitonov-Polynome Hurwitz-Polynome sind. In diesem Fall ist die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ des LTI-Systems asymptotisch stabil. □

Egal welchen Grad das zu untersuchende (charakteristische) Polynom hat, stets reicht es, genau vier Polynome mit dem Hurwitz-Kriterium zu untersuchen. Der Aufwand für die Überprüfung der Intervall-Stabilität ist also höchstens viermal so groß.

Beispiel

Wir untersuchen die Stabilität von

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} x$$

für beliebige Koeffizienten mit $a_0 \in [1, 2]$, $a_1 \in [1, 3]$ und $a_2 \in [1, 2]$. Das mittels Koeffizienten in diesen Intervallen darstellbare Polynom $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$ ist kein Hurwitz-Polynom. Damit kann das System auch nicht intervall-stabil sein.

Wir überprüfen, ob dies auch anhand der Kharitonov-Polynome

$$\begin{aligned}
p_1(\lambda) &= 1 + \lambda + 2\lambda^2 + \lambda^3 \\
p_2(\lambda) &= 2 + 3\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 \\
p_3(\lambda) &= 2 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 \\
p_4(\lambda) &= 1 + 3\lambda + 2\lambda^2 + \lambda^3
\end{aligned}$$

gefolgert werden kann.

Mit dem Hurwitz-Kriterium zeigt man leicht, daß das Polynom $p_3(\lambda)$ kein Hurwitz-Polynom ist ($p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$ und $p_4(\lambda)$ sind Hurwitz-Polynome). Es kann also für eine beliebige Koeffizientenlage innerhalb der genannten Intervalle asymptotische Stabilität des Systems nicht garantiert werden.