Beiblatt 6: zur Stabilität zeitdiskreter LTI-Systeme

Wir beschränken uns auf zeitdiskrete LTI-Systeme. Da bei LTI-Systemen Stabilität stets gleichmäßige Stabilität impliziert, soll hier auf die Definition von gleichmäßiger Stabilität verzichtet werden.

Definition (Stabilität zeitdiskreter LTI-Systeme)**.**

Die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ *eines zeitdiskreten LTI-Systems* $x(k+1) = A_\mathrm{d}\, x(k)$ *mit* $A_\mathrm{d} = \mathbb{R}^{n\times n}$, $x(k_0) = x_0$, *heißt*

- *stabil, wenn es ein* $\gamma > 0$ *gibt, so daß für beliebige* $x_0 \in \mathbb{R}^n$
$$\|x(k)\| \leq \gamma \|x_0\|, \quad \forall k \geq k_0$$
- *asymptotisch stabil, wenn darüber hinaus gilt:*
$$\lim_{k\to\infty} \|x(k)\| = 0\,. \qquad \square$$

Bei der Herleitung eines Stabilitätskriteriums kann man wie beim zeitkontinuierlichen Fall vorgehen. Da die Lösung im zeitdiskreten Fall
$$x(k) = (A_\mathrm{d})^{k-k_0}\; x_0$$
ist, benötigen wir die k-te Potenz der Jordanschen Normalform von A_d, also die k-te Potenz $(J_\kappa)^k$ eines Jordan-Kästchens $J_\kappa = \lambda I_\kappa + N_\kappa$. Matrix N_κ ist nilpotent. Mit dem binomischen Lehrsatz gilt
$$(J_\kappa)^k = (\lambda\, I_\kappa + N_\kappa)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda\, I_\kappa)^{k-i} N_\kappa^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N_\kappa^i$$
und schließlich
$$(J_\kappa)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & & \\ & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \ddots & & \\ & & \lambda^k & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ & & & & & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Analyse der Beschränktheit dieses Ausdrucks und Grenzwertbetrachtungen bzgl. k führen zu:

Satz (Stabilität zeitdiskreter LTI-Systeme)**.**

Sei $A_\mathrm{d} = \mathbb{R}^{n\times n}$ *Dynamikmatrix eines zeitdiskreten LTI-Systems* $x(k+1) = A_\mathrm{d}\, x(k)$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\bar n}$ *(im allgemeinen ist* $\bar n \leq n$*).*

Die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ *ist genau dann*

(1) asymptotisch stabil, wenn
$$|\lambda_i| < 1, \quad \forall i = 1, \ldots, \bar n$$

(2) stabil, wenn
$$|\lambda_i| \leq 1, \quad \forall i = 1, \ldots, \bar n$$
und zusätzlich für jeden Eigenwert mit $|\lambda_j| = 1$ *gilt:*
$$\mathrm{mult}_\mathrm{alg}(\lambda_j) = \mathrm{mult}_\mathrm{geo}(\lambda_j)$$

(3) instabil, wenn eine der Bedingungen in (2) verletzt ist. $\square$