Beiblatt 8: Eigenwerte gestatten keine Stabiltätsaussage bei zeitvarianten Systemen

Bei zeitvarianten linearen Systemen $\dot{x} = A(t)\,x$ läßt die Lage der Eigenwerte von $A(t)$ keine Schlüsse auf die Stabilität zu. Dies ist nicht einmal dann der Fall, wenn $A(t)$ konstante Eigenwerte hat, wie im folgenden anhand von Gegenbeispielen gezeigt wird.

Eigenwerte mit negativem Realteil nicht hinreichend für Stabilität

Wir betrachten das zeitvariante, lineare System 2. Ordnung[1]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4a & -3ae^{8at} \\ ae^{-8at} & 0 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}.$$

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, daß die Eigenwerte von $A(t)$ konstant sind und mittels a so gewählt werden können, daß diese negativen Realteil aufweisen.

Dennoch ist dieses System instabil, was wir anhand der Lösung einsehen konnten. Wie man zur Lösung des Systems gelangt, soll hier nachgetragen werden.

Aus der 2. Zeile der Systemdarstellung folgt sofort

$$x_1 = \frac{1}{a}e^{8at}\dot{x}_2 \tag{1}$$

also auch

$$\dot{x}_1 = 8e^{8at}\dot{x}_2 + \frac{1}{a}e^{8at}\ddot{x}_2\,.$$

Setzen wir diese beiden Beziehungen in die erste Zeile der Systemdarstellung ein, so läßt sich x_1 eliminieren und wir erhalten

$$8e^{8at}\dot{x}_2 + \frac{1}{a}e^{8at}\ddot{x}_2 = 4e^{8at}\dot{x}_2 - 3ae^{8at}x_2\,.$$

Da die Exponentialfunktion nie null wird, ergibt sich nach einfacher Umstellung

$$\ddot{x}_2 + 4a\dot{x}_2 + 3ax_2 = 0\,,$$

d.h. eine zeitinvariante, lineare Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung sich in geschlossener Form als

$$x_2(t) = c_1e^{-at} + c_2e^{-3at} \tag{2}$$

angeben läßt. Die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bestimmen wir später über die Anfangsbedingung. Differenzieren wir nun (2) nach der Zeit und setzen in (1) ein, so erhalten wir:

$$x_1(t) = -c_1e^{7at} - 3c_2e^{5at}$$

also insgesamt

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{7at} & -3e^{5at} \\ e^{-at} & e^{-3at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt sofort die Beziehung

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

[1] Wilson Rugh, Linear System Theory. Prentice Hall, 2. Auflage, 1996.

und die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_{10} + 3x_{20}) \\ -\frac{1}{2}(x_{10} + x_{20}) \end{pmatrix} .$$

Die an die Anfangsbedingung angepaßte Lösung ist damit schließlich

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(x_{10} + x_{20})e^{5at} - \frac{1}{2}(x_{10} + 3x_{20})e^{7at} \\ \frac{1}{2}(x_{10} + 3x_{20})e^{-at} - \frac{1}{2}(x_{10} + x_{20})e^{-3at} \end{pmatrix} .$$

Damit ist das System für $a \neq 0$ offenbar instabil.

Eigenwerte mit negativem Realteil nicht notwendig für Stabilität

Ein zeitvariantes System zweiter Ordnung

$$\dot{z} = A(t)\, z$$

kann mit einer regulären zeitvarianten Zustandstransformation $x(t) = T(t)\, z(t)$ auf die Form

$$\dot{x} = \left(T\, A(t)\, T^{-1} + \dot{T}\, T^{-1} \right) x$$

transformiert werden.

Wir betrachten nun ein Beispielsystem in x-Koordinaten,

$$\dot{x} = -\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 2\omega & \alpha \end{pmatrix} x\,, \tag{3}$$

das für $\alpha > 0$ offenbar für beliebige $\omega \in \mathbb{R}$ asymptotisch stabil ist.

Im Hiblick auf eine Zustandstransformation $T = T(t)$ zerlegen wir das System gemäß

$$\dot{x} = \Bigg(\underbrace{-\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}}_{T\,A(t)\,T^{-1}} + \underbrace{\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\dot{T}\,T^{-1}} \Bigg) x\,.$$

Für Drehmatrizen ist bekannt, daß das Produkt $\dot{T}\,T^{-1}$ schiefsymmetrisch ist. In der Tat folgt aus

$$T(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

das Produkt

$$\dot{T}\,T^{-1} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für diese Wahl ist zudem T, T^{-1} und $\dot{T}$ für beliebige reelle t beschränkt.

Damit sind wir nun in der Lage, die zeitvariante Systemmatrix $A(t)$ für das zu (3) korrespondierende, zeitvariante System $\dot{z} = A(t)\, z$ zu berechnen:

$$A(t) = T^{-1} \begin{pmatrix} -\alpha & -\omega \\ -\omega & -\alpha \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} -\alpha + \omega \sin 2\omega t & -\omega \cos 2\omega t \\ -\omega \cos 2\omega t & -\alpha - \omega \sin 2\omega t \end{pmatrix}.$$

Matrix $A(t)$ hat infolge der Ähnlichkeitstransformation konstante Eigenwerte. Sie ergeben sich aus

$$\det \left(\lambda\, I - \begin{pmatrix} -\alpha & -\omega \\ -\omega & -\alpha \end{pmatrix} \right) = (\lambda + \alpha)^2 - \omega^2$$

zu

$$\lambda_{1/2} = \pm\omega - \alpha\,.$$

Für beliebige ω mit $|\omega| > \alpha$ hat $A(t)$ offenbar einen positiven Eigenwert. Das System $\dot{z} = A(t)\, z$ ist aber wie das äquivalente Orginalsystem (3) selbstverständlich asymptotisch stabil.