Regelungs- und Systemtechnik 2

Winter 09

Lösung Übung 2 Aufgabe 3 (a) unter Verwendung von Beiblatt 1:

Gegeben ist die lineare zeitvariante Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix} x(t),\ x(0) = x_0.$$

Die allgemeine Herangehensweise zur Berechnung der Lösung $x(t) = \Phi(t,0)x(0)$ wäre die Auswertung der Peano-Baker-Reihe:

$$\Phi(t,0) = I + \int_0^t A(\sigma_1)d\sigma_1 + \int_0^t A(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} A(\sigma_2)d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots$$

In diesem Fall kann man jedoch die Vertauschbarkeit von $A(t)$ mit seinem Integral ausnutzen:

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad \int_0^t A(\sigma_1)d\sigma_1 = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ 0 & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A(t)\int_0^t A(\sigma_1)d\sigma_1 = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{2} & t^3 \\ 0 & \frac{t^3}{2} \end{pmatrix}, \quad \int_0^t A(\sigma_1)d\sigma_1 A(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{2} & t^3 \\ 0 & \frac{t^3}{2} \end{pmatrix}$$

Die Gleichheit ist gegeben, weil die Matrix $A(t)$ vom Typ $A(t) = Mf(t)$, $M =$ const., $f(t) \in \mathbb{R}$ ist. Eine kurze Rechnung führt nämlich auf

$$A(t)\int_0^t A(\tau)d\tau = Mf(t)\int_0^t Mf(\tau)d\tau = M\int_0^t f(\tau)d\tau Mf(t) = \int_0^t Mf(\tau)d\tau Mf(t) = \int_0^t A(\tau)d\tau A(t).$$

Also gilt ganz allgemein, dass für Matrizen vom Typ $A(t) = Mf(t)$ Vertauschbarkeit von $A(t)$ mit seinem Integral $\int_0^t A(\sigma_1)d\sigma_1$ vorliegt.

Folglich lässt sich verwenden, dass sich die Transitionsmatrix als $\Phi(t,0) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}$ schreiben lässt (siehe Beiblatt 1 zur Vorlesung). Verwendet man dann die Matrixreihe der Exponentialfunktion und setzt das Integral über $A(t)$ ein (siehe (1)), so erhält man

$$\Phi(t,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ 0 & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}^k \frac{1}{k!} = I + \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ 0 & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^4}{4} & \frac{t^4}{2} \\ 0 & \frac{t^4}{4} \end{pmatrix}\frac{1}{2!} + \begin{pmatrix} \frac{t^6}{8} & \frac{3t^6}{8} \\ 0 & \frac{t^6}{8} \end{pmatrix}\frac{1}{3!} + \dots$$

was wegen

$$\Phi_{11} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} + \dots = e^{\frac{t^2}{2}} = \Phi_{22}$$

$$\Phi_{12} = 0 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{16} + \dots = \frac{t^2}{2}e^{\frac{t^2}{2}}, \quad \Phi_{21} = 0$$

zur Lösung

$$x(t) = \Phi(t,0)x(0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} & \frac{t^2}{2}e^{\frac{t^2}{2}} \\ 0 & e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix} x(0)$$

führt.