RST2 - Epilog zur Übung 2

WS19/20

Ergänzende Informationen: Keplersches Zweikörperproblem

Die Gravitiationskraft ist proportional zu

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen des Satelliten nutzen wir den Impulssatz in karthesischen Koordinaten. Dabei ist die Gravitaionskraft porportional zur Satelliten- und Erdmasse, sowie zum inversen Quadrat des Abstandes (vgl. Abbildung. 1).

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_x: &\qquad m\ddot{x} = -\cos(\varphi)\left(\frac{\tilde{\gamma}Mm}{r^2}\right) + \cos(\varphi)mu_1 - \sin(\varphi)mu_2 \\
\vec{e}_y: &\qquad m\ddot{y} = -\sin(\varphi)\left(\frac{\tilde{\gamma}Mm}{r^2}\right) + \sin(\varphi)mu_1 + \cos(\varphi)mu_2
\end{aligned}
$$

Zut Beschreibung in Polarkoordinaten betrachten wir die Koordinatentransfomation und bilden anschließend die Ableitungen.

$$
\left.\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(\varphi(t)) \\ y(t) &= r(t)\sin(\varphi(t)) \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{(x^2(t)+y^2(t))} \\ \phi(t) &= \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \end{aligned}\right.
$$

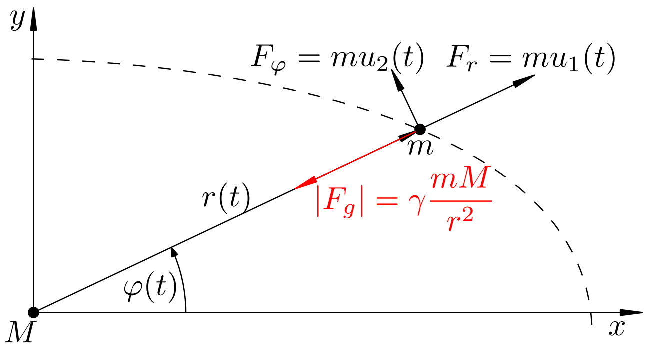

Abbildung 1: Kräftebilanz am Satelliten.

Die erste Ableitung liefert die Geschwindigkeiten:

$$
\dot{r}(t) = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r} \tag{1}
$$

$$
\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{r^2} \tag{2}
$$

Für den Impulserhaltungssatz sind die Beschleunigungen notwendig:

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= \frac{\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y}\right) r - \left(x\dot{x} + y\dot{y}\right)\dot{r}}{r^2} = \frac{\left(x\ddot{x} + y\ddot{y}\right)}{r} + \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{r} - \frac{\left(x\dot{x} + y\dot{y}\right)^2}{r^3} \\
&= \frac{\left(x\ddot{x} + y\ddot{y}\right)}{r} + \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - \left(x\dot{x} + y\dot{y}\right)^2}{r^3} \qquad = \underline{\underline{\frac{\left(x\ddot{x} + y\ddot{y}\right)}{r} + r\dot{\varphi}}} \qquad (3) \\
\ddot{\varphi} &= \frac{\left(\ddot{y}x + \dot{y}\dot{x} - \dot{y}\dot{x} - y\ddot{x}\right) r^2}{r^4} - \frac{\left(x\dot{y} - \dot{x}y\right)\left(2x\dot{x} + 2y\dot{y}\right)}{r^4} \\
&= \frac{\left(\ddot{y}x - y\ddot{x}\right)}{r^2} - \frac{\left(x\dot{y} - \dot{x}y\right)}{r^2}\frac{2\left(x\dot{x} + y\dot{y}\right)}{r}\frac{1}{r} \qquad = \underline{\underline{\frac{\left(\ddot{y}x - y\ddot{x}\right)}{r^2} - 2\frac{\dot{\varphi}\dot{r}}{r}}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Jetzt wird der Impulssatz in karthesischen Koordinaten mit $\gamma = \tilde{\gamma}M$ eingesetzt (vgl. Kräftebilanz in Abb. 1):

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\cos(\varphi)\left(\frac{\gamma}{r^2}\right) + \cos(\varphi)u_1 - \sin(\varphi)u_2 \\
\ddot{y} &= -\sin(\varphi)\left(\frac{\gamma}{r^2}\right) + \sin(\varphi)u_1 + \cos(\varphi)u_2
\end{aligned}$$

Die Auswertung der Terme mit den Ableitungen zweiter Ordnung liefert damit:

$$\begin{aligned}
x\ddot{x} + y\ddot{y} = {} & r\cos(\varphi)\left(-\cos(\varphi)\left(\frac{\gamma}{r^2}\right) + \cos(\varphi)u_1 - \sin(\varphi)u_2\right) + \\
& r\sin(\varphi)\left(-\sin(\varphi)\left(\frac{\gamma}{r^2}\right) + \sin(\varphi)u_1 + \cos(\varphi)u_2\right) \qquad (5) \\
= {} & -\frac{\gamma}{r} + ru_1 \\
x\ddot{y} - \ddot{x}y = {} & r\cos(\varphi)\left(-\sin(\varphi)\left(\frac{\gamma}{r^2}\right) + \sin(\varphi)u_1 + \cos(\varphi)u_2\right) - \\
& r\sin(\varphi)\left(-\cos(\varphi)\left(\frac{\gamma}{r^2}\right) + \cos(\varphi)u_1 - \sin(\varphi)u_2\right) \qquad (6) \\
= {} & ru_2
\end{aligned}$$

Mit (3) bzw. (4) ergeben sich die Bewegungsdifferentialgleichungen des Kepplerschen Zweikörperproblems:

$$\ddot{r}(t) = -\frac{\gamma}{r^2(t)} + r\dot{\varphi}(t) + u_1(t) \qquad (7)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -2\frac{\dot{\varphi}(t)\dot{r}(t)}{r(t)} + \frac{u_2(t)}{r(t)} \qquad (8)$$

Dieses Differentialgleichungssystem ist Ausgangspunkt zur Berechnung der allgemeinen Lösung des Keplerschen Zweikörperproblems und hat bekanntermaßen als Lösung u.a.

Ellipsen:	$\sqrt{\gamma/r_0^3} \leq \dot{\varphi} < \sqrt{2\gamma/r_0^3}$,
Parabeln:	$\dot{\varphi} = \sqrt{2\gamma/r_0^3}$ und
Hyperbeln:	$\dot{\varphi} > \sqrt{2\gamma/r_0^3}$.

Die einfachste Lösung ist die Bewegung auf einer Kreisbahn mit konstanter Umlaufgeschwindigkeit, d.h. $r(t)$ und $\dot{\varphi}(t) = \sqrt{\gamma/r_0^3}$ sind konstant.

Numerische Betrachtungen

1. Verifizieren Sie die stationären Lösungen (Kreisbahn) simulativ für geostationäre Satelliten. Hierzu können die Differenzialgleichungen in Simulink implementiert werden. Sie können die Parameter aus Tabelle 1 nutzen.

Tabelle 1: Simulationsparameter.

Gravitationskonstante	$\tilde{\gamma}$	$6.67408 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$
Erdmasse	M	$5.976 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Erdradius	r_{Erde}	$6371 \cdot 10^{3}\,\mathrm{m}$
Umlaufzeit	ω_0	$2\pi/(60 \cdot 60)\,\mathrm{rad/s}$
Flughöhe	h	$35786 \cdot 10^{3}\,\mathrm{m}$

Zur Implementierung mit `ode45` können sie die implementierte Dynamik `dotx_satellite.m` verwenden.

2. Zur Prüfung der Linearisierung kann die Symbolic Toolbox genutzt werden:

```
% Symbolic calculations:
syms x1 x2 .. xn u1 u2 .. up              % define symbolic state and input ...
    variables
assume([x1 x2 .. xn],'real');             % set state variables to real values
assume([u1 u2 .. up],'real');             % set input variables to real values
f= [x1*sin(x1)+u2; x1*x2+4*tan(u1)];      % define system dynamics
xstar=[];                                 % define operation point / trajectory
ustar=[];

% linerization
A=jacobian(f,[x1 x2 .. xn]);              % compute A
B=jacobian(f,[u1 u2 .. up]);              % compute B

% insert operation point
A=subs(A,[x1 x2 .. xn u1 u2 .. up],[xstar u\_star]);
B=subs(B,[x1 x2 .. xn u1 u2 .. up],[xstar u\_star]);
```

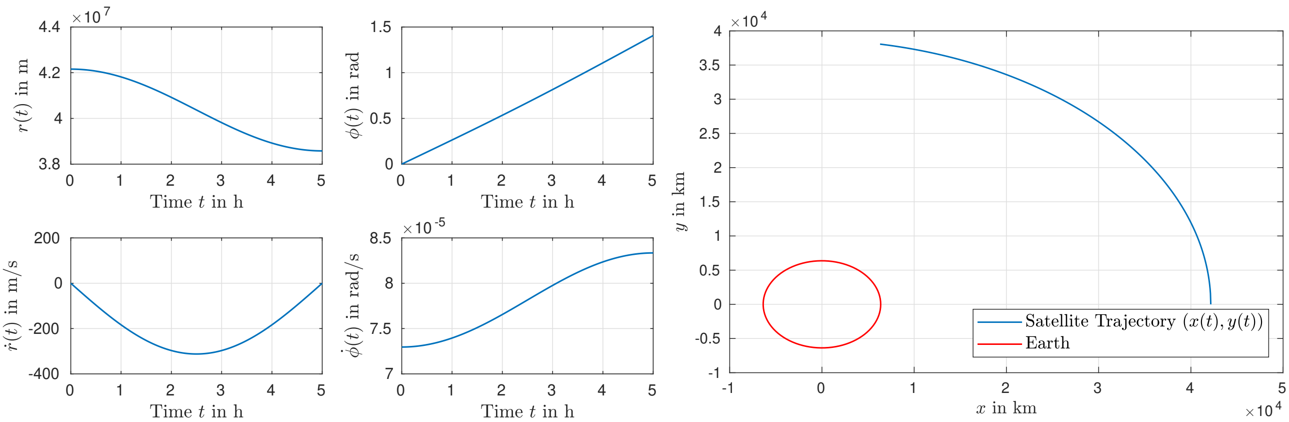

Abbildung 2: Simulationsergebnisse zum Bahnwechsel.

3. Verdeutlichen Sie sich den Unterschied zwischen absoluten Koordinaten $x(t)$ und lokalen Abweichungsgrößen $\Delta x(t)$ indem sie den Zustandsverlauf der Linerarisierung mit dem zeitlichen Verlauf des absoluten Zustandes vergleichen. Nutzen Sie die Anfangswerte $\Delta x(0) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top$ und $x(0) = \begin{pmatrix}r_{\text{Erde}} + h & 0 & \sqrt{\gamma/(r_{\text{Erde}} + h)^3} & 0\end{pmatrix}^\top$.
4. Gegeben sei das System $\dot{x} = f(x)$ und die Trajektorie $x^*(t)$ mit $\dot{x}^* \neq f(x^*)$. Was müssen Sie bei der Linearizierung / Entwicklung der Taylorreihe zusätzlich beachten?
5. Zur Überprüfung einer Betriebspunktlinearisierung kann ebenso ein Simulink-Modell linearisiert werden: Linearisierung von Simulink Modellen.

Verweis auf Klausuraufgaben

- Linearisierung am Betriebspunkt:
  - Übungsklausur 1 (Sommer 2010) Aufgabe 1.
  - Übungsklausur 2 (Winter 2010/11) Aufgabe 1.
  - Übungsklausur 3 (Sommer 2011) Aufgabe 1.
  - Übungsklausur 4 (Winter 2011/12) Aufgabe 1.
  - Übungsklausur 5 (Sommer 2012) Aufgabe 1.
  - Übungsklausur 6 (Winter 2012/13) Aufgabe 1.
  - Übungsklausur 8 (Winter 2013/14) Aufgabe 1.
  - Übungsklausur 10 (Winter 2015/16) Aufgabe 1.
  - Übungsklausur 11 (Sommer 2016) Aufgabe 5.
  - Übungsklausur 14 (Winter 2017/18) Aufgabe 1.
- Linearisierung entlang einer Trajektorie:
  - Übungsklausur 17 (Sommer 2019) Aufgabe 1.

Weiterführende Literatur

1. **Youtube Links** (Simulink Tutorial): Differentialgleichungen

[1] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1 & 2*. Springer, 1995

[2] OLSDER, G. ; WOUDE, J. van d.: *Mathematical Systems Theory*. 3. Auflage. VSSD, 2004

[3] RUGH, W.: *Linear System Theory*. 2. Auflage. Prentice Hall, 1996