RST2 - Epilog zur Übung 4

WS19/20

Vorwort zum Epilog 4

In diesem Epilog wird das Thema Laplacetransformation und Realisierung behandelt. Ziel ist es Systeme vom Zustandsraum in den Laplacebereich zu bringen und Systeme im Laplacebereich im Zustandsraum zu realisieren.

Laplacetransformation: Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\,. \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C\frac{\operatorname{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B + D\,.$$

Alternativ kann die Rosenbrocksystemmatrix aufgestellt werden.

$$P(s) = \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Die Übertragungsfunktion $G_{i,j}(s)$ vom Eingang i zum Ausgang j ergibt sich durch

$$G_{i,j} = \frac{\begin{vmatrix} sI - A & -b_i \\ c_j & d_{i,j} \end{vmatrix}}{|sI - A|}$$

wobei b_i die i-te Spalte von B und c_j die j-te Zeile von C ist.

Realisierung: Gegeben seien die Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad G_2(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

mit $m < n$. Für die strikt propere[1] Übertragungsfunktion $G_1(s)$ lautet die Realisierung in Regelungsnormalform

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad D = 0\,.$$

Der Grad des Zähler- und des Nennerpolynoms sind bei der Übertragungsfunktion $G_2(s)$ gleich. Somit ist $G_2(s)$ nicht durchgriffsfrei. Die Übertragungsfunktion lässt sich darstellen als

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{b_n(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) + (b_{n-1} - b_n a_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 - b_n a_1)s + (b_0 - b_n a_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 - b_n a_1)s + (b_0 - b_n a_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\,. \end{aligned}$$

[1] Relativgrad größer 0

Die Realisierung dieser Übertragungsfunktion ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \dots & b_i - b_n a_i & \dots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad D = b_n \,.$$

Hinweis: Gegebenenfalls sollten Sie eine gegebene Übertragungsfunktion auf eine der Formen ($G_1(s)$ oder $G_2(s)$) bringen. Wichtig ist dabei, dass gilt $a_n = 1$.

Ergänzungsaufgaben

1. Bringen Sie folgende Systeme in den Laplacebereich und vereinfachen Sie die Übertragungsfunktionen:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D_1 = 0$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad D_2 = 0$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad D_3 = 0$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D_4 = 2$

2. Gegeben ist das folgende MIMO-System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 5 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u.$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen von jedem Eingang zu jedem Ausgang mithilfe der Rosenbrockmatrix.

3. Realisieren Sie folgende Systeme in Regelungsnormalform:

a) $G_1(s) = \dfrac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$ $\quad$ b) $G_2(s) = \dfrac{(s+1)^2}{(s+1)(s+2)(s-3)}$ $\quad$ c) $G_3(s) = \dfrac{s-1}{(s^2+s+1)+5}$

d) $G_4(s) = \dfrac{s^2+2s+1}{5s^2+3s+1}$ $\quad$ e) $G_5(s) = \dfrac{s^3+1}{(s+2)(s+4)(s+5)}$ $\quad$ f) $G_6(s) = 5 + \dfrac{3s+2}{(s+10)(s+15)}$

4. Gegeben sind die folgenden Systeme im Zeitbereich

$A_1 = \begin{pmatrix} -6 & -2.5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \end{pmatrix}$ $\quad D_1 = 1$

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D_2 = 0$

(a) Transformieren Sie die Systeme in den Laplacebereich.

(b) Berechnen Sie $G_3(s) = G_1(s)G_2(s)$. Vereinfachen Sie das System so weit wie möglich.

(c) Realisieren Sie $G_3(s)$ in Regelungsnormalform.

Numerische Betrachtungen

Die numerische Betrachtung steht im direkten Bezug zur Aufgabe 3 in Übung 4. Zunächst wird das ungeregelte System mit den Parametern $L = 1\,\mathrm{mH}$, $C = 100\,\mu\mathrm{F}$, $R = 10\,\Omega$ und $E = 12\,\mathrm{V}$ betrachtet. Wir möchten uns das Phasenportrait und verschiedene Höhenlinien von $V(x)$ betrachten. Das Matlab/Octave-Skript `rst2_epilog4.m`, das hier[2] auffindbar ist, hilft Ihnen dabei dies für das ungeregelte System umzusetzen. Machen Sie sich mit dem Skript und den verwendeten Befehlen vertraut.

1. Was fällt Ihnen bei der eingezeichneten Höhenlinie und den Richtungspfeilen auf? Zeigen manche Pfeile nach außen oder zeigen alle nach innen? Zoomen Sie bei nicht direkt erkennbaren Stellen näher heran!

2. Erweitern Sie das Skript so, dass Sie andere Höhenlinien hinzufügen. Führen Sie dies z. B. für $V(x) = 2 \times 10^{-4}$ und $V(x) = 18 \times 10^{-6}$ durch.
Hinweis: Es genügt die Höhenlinien zu zeichnen. Die Richtungspfeile sind hierzu nicht unbedingt erforderlich.

3. Variieren Sie die Anfangswerte x_0 der Simulation und fügen Sie ggf. eine Höhenlinie hinzu, sodass der von Ihnen gewählte Anfangswert innerhalb einer Höhenlinie startet. Wird der von der Höhenlinie eingeschlossene Bereich verlassen?

Nachfolgend soll das geregelte System mit Regelgesetz $u = -Kx_1$ und $K > 0$ betrachtet werden. Die Systembeschreibung lautet nun

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K\frac{E}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

4. Schreiben Sie ein Skript, dass Ihnen für das geregelte System ein Phasenporträt ausgibt mit Simulationsplot für gewählte Anfangswerte x_0 innerhalb einer gewählten Höhenlinie, an der Richtungspfeile angezeigt werden. Als Reglerparameter können Sie $K = 0.5$ verwenden und später variieren. Nutzen Sie das gegebene Skript als Vorlage dafür.
Welcher Wert x_e wird für $t \to \infty$ erreicht?

5. Was passiert, wenn Sie $K = -\frac{L}{RCE}$ oder $K < -\frac{L}{RCE}$ wählen?

Verweis auf Klausuraufgaben

- Realisierung und Laplacetransformation:
  - Übungsklausur 2 (Winter 2010/11) Aufgabe 2.
  - Übungsklausur 4 (Winter 2011/12) Aufgabe 2.
  - Übungsklausur 7 (Sommer 2013) Aufgabe 1.
  - Übungsklausur 11 (Sommer 2016) Aufgabe 4.
  - Übungsklausur 13 (Sommer 2017) Aufgabe 1.

[2] `https://www.tu-ilmenau.de/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=297554&token=499636211989085e5149afb5d6d05844a2d66c5e`

  - Übungsklausur 15 (Sommer 2018) Aufgabe 3 a).
  - Übungsklausur 16 (Winter 2018/19) Aufgabe 4 f).

- Stabilität zeitkontinuierlicher LTI Systeme:
  - Übungsklausur 1 (Sommer 2010) Aufgabe 4 a).
  - Übungsklausur 2 (Winter 2010/11) Aufgabe 4 a).
  - Übungsklausur 10 (Winter 2015/16) Aufgabe 2 a).
  - Übungsklausur 11 (Sommer 2016) Aufgabe 1 a), Aufgabe 2 a).
  - Übungsklausur 13 (Sommer 2017) Aufgabe 3 a).

Weiterführende Literatur

Die Transformation vom Zustandsraum zur Übertragungsfunktion (oder Übertragungsmatrix) ist in [1] im Kapitel 2.9.3 ab Seite 82 beschrieben. Ab Seite 86 (Satz 2.40) beschreibt Ludyk [1] die Realisierung einer Übertragungsfunktion.

Einen kurzen aber informativen Artikel zur Rosenbrockmatrix gibt es auf Wikipedia.

[1] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1 & 2*. Springer, 1995

[2] OLSDER, G. ; WOUDE, J. van d.: *Mathematical Systems Theory*. 3. Auflage. VSSD, 2004

[3] RUGH, W.: *Linear System Theory*. 2. Auflage. Prentice Hall, 1996