RST2 - Epilog zur Übung 6

WS19/20

Ergänzungsaufgaben

Die folgenden Aufgaben dienen zur Festigung der Berechnungsmethoden zur Polvorgabe wie in Übung 6 behandelt. Es finden Rechenmethoden zur Eigenwertbestimmung, Matrixinversion und Adjunktenbestimmung Anwendung.

Aufgabe 1: Direkte Polvorgabe
Im folgenden sind zeitkontinuierliche Systeme der Form $\dot{x} = Ax + Bu$ mit den entsprechenden (A, B) Paaren sowie Wunschpole λ_i^* gegeben:

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \lambda_1^* = -1 \\ \lambda_2^* = -2 \end{cases}$ *(ii)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \lambda_1^* = -1 \\ \lambda_2^* = -2 \end{cases}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_i^* = -1$ *(iv)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \lambda_1^* = -1 \\ \lambda_2^* = -2 \\ \lambda_3^* = -3 \end{cases}$

Bestimmen Sie jeweils die Rückführungsmatrix $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ so, dass die Pole von $A + BK$ den Wunschpolen entsprechen. Nutzen Sie dabei **nicht** die Formel von Ackermann.

Aufgabe 2: Formel von Ackermann
Im folgenden sind zeitkontinuierliche Systeme der Form $\dot{x} = Ax + Bu$ mit den entsprechenden (A, B) Paaren sowie Wunschpole λ_i^* gegeben:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \lambda_1^* = -1 \\ \lambda_2^* = -10 \end{cases}$ *(ii)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2}^* = -1 \pm j$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_i^* = -2$ *(iv)* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \lambda_1^* = -3 \\ \lambda_{2,3}^* = -2 \pm j \end{cases}$

Nutzen Sie die **Formel von Ackermann** zur Bestimmung der Rückführungsmatrix $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ so, dass die Pole von $A + BK$ den Wunschpolen entsprechen.

Aufgabe 3: PID Zustandsregler & Störungen
Betrachten Sie im Folgenden da System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \bar{u} \quad , \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + d(t) \end{aligned}$$

wobei $d(t)$ die ausgangsseitige und $d_i(t)$ die eingangsseitige Störung im Systemeingang $\bar{u} = u(t) + d_i(t)$ darstellt.

a) Entwerfen Sie für das System ohne Störung ($d, d_i \equiv 0$) einen P-Zustandsregler der Form

$$u = Kx + K_P\, e\,, \;\; e := r - y\,,$$

der die Pole des geschlossenen Regelkreises $A + BK$ auf -1 legt sowie stationäre Genauigkeit $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = r = const.$ garantiert.
Bestimmen Sie den Endwert des Ausgangs für den Fall, dass die Störung $d = 3$ gilt. Kann die Störung kompensiert werden?

b) Erweitern Sie das Regelgesetz zu einem PID-Zustandsregler der Form:

$$u = Kx + K_P\, e + K_D\, \dot{e} + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau\,, \;\; e := r - y\,,$$

Entwerfen Sie die Reglerparameter K, K_P, K_D, K_I, um die Spezifikationen aus (a) ohne Störeinfluss ($d, d_i \equiv 0$) zu erfüllen. Dabei soll der Parameter $K_D = 2$ gewählt werden. Zeigen Sie, dass die konstante Störung $d = 3$ stationär kompensiert wird.
Wie wirkt sich die eingangsseitige Störung $d_i \neq 0$ auf den tatsächlichen Systemeingang $\bar{u}$ aus und welchen Einfluss hätte eine Anhebung der Differenziererverstärkung K_D?

Hinweis: Gehen Sie dabei analog zum PI-Zustandsreglerentwurf von Beiblatt 11 vor und drücken Sie den Differenzierer-Anteil in Abhängigkeit des Zustands aus.

Numerische Betrachtungen

Nutzen Sie die Vorlagen-Dateien zur Nutzung in Matlab bzw. Octave, die auf der RST2 Webseite unter `epilog6_files.zip` (Zusatzmaterial zum Epilog 6) heruntergeladen werden können. Die Code-Beispiele im Folgenden sind dementsprechend in den enthaltenen **Vorlagen** `rst2_epilog6_NX_XXX.m` zu finden. Die folgenden Aspekte werden hierbei beleuchtet:

- Numerische Berechnung der Verstärkungsmatrix zur Polvorgabe,
- Implementierung und Simulation eines zeitdiskreten Regelungssystems, *Motivation:* üblicherweise digitale Implementierung auf Micronctrollern über Abtastung
- Stellbegrenzungen in Entwurf einbeziehen und erfüllen,
- Führungsverhalten und Störkompensation durch Kombination von Zustandsreglern mit I-Anteil.

Aufgabe N1: Funktionen zur Polvorgabe

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus den Epilog-Aufgaben 1 & 2 unter Benutzung der Funktion `place` bzw. `acker`.

```
% Example system:
A = [0 1;2 3];
B = [0;1];
% Pole placement:
P = [-1 -1]; % desired CL polynomial
K = -place(A,B,P); % calculate gain
```

Erkennen Sie Unterschiede zwischen den beiden Polvorgabefunktionen? Warum wurde im obigen Beispiel ein Minus vor dem Funktionsaufruf eingefügt?

Aufgabe N2: Zeitdiskrete Regelung

In der Übungsaufgabe 1 wurde ein abgetastetes zeitdiskretes System betrachtet, das den folgenden Ursprung hat:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \qquad \Rightarrow \qquad x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix} u(k)\,.$$

Dabei wurde die Diskretisierung mit der Abtastzeit $T > 0$ durchgeführt und führte zu den zeitdiskreten Systemmatrizen $A_d = e^{AT}, B_d = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau$. Der Ausgang ist $y = x_1$.

a) Tasten Sie das kontinuierliche System mit verschiedenen Abtastzeiten von $T \in \{1, 0.5, 2\}$ ab.
Funktionen: `ss`, `c2d`

b) Prüfen Sie die Ergebnisse aus der Übung, indem Sie den entworfenen Regler

$$u(k) = K\,x(k) + F\,u(k) = -\left(\tfrac{1}{T^2} \quad \tfrac{3}{2T}\right) x(k) + \frac{1}{T^2}\,u(k)$$

im geschlossenen Regelkreis für die Abtastzeiten aus (a), den Anfangszustand $x_0 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ und die Referenz $r = 3$ simulieren. Gehen Sie dabei für die verschiedene Abtastschritte jeweils wie folgt vor:

(i) Lösen Sie die entsprechende Differenzengleichung des Gesamtsystems für $k \in \{0, 1, \ldots, K\}$. Wählen Sie die Simulationsdauer $K \in \mathbb{N}$ angemessen.

(ii) Stellen Sie die entsprechenden Ausgangssignale $y(k)$ für die drei Fälle in einer Grafik dar und beurteilen Sie den Einfluss der Abtastzeit.

(iii) Stellen Sie für die verschiedenen Abtastperioden jeweils den Stellgrößenverlauf $u(k)$ in einer Grafik dar.

Hinweis: Sie können das zeitdiskrete Simulationsprogramm aus Epilog 5 / Aufgabe N3 wiederverwenden. Alternativ bieten sich auch die Simulationsoptionen bzgl. der `ss` Funktion an.

c) Überprüfen Sie simulativ, ob sich das Korrektursignal ($u(k)$ ohne Vorfilter) des Reglers in den in Übungsaufgabe 1d gesetzten Schranken befindet.

Aufgabe N3: Störungskompensation

Implementieren Sie den jeweiligen Zustandsregler mit I-Anteil aus den vorherigen Aufgaben und Prüfen Sie simulativ die Kompensationseigenschaften bezüglich ausgangsseitiger Störungen.

a) PI-Zustandsregler aus Übungsaufgabe 2

b) P/PID-Zustandsregler Vergleich aus Epilog-Aufgabe 3
(Prüfen Sie Ihre Überlegungen zur Wirkung von K_D auf den Störeinfluss $d_i(t)$)

Nutzen Sie zur Realisierung des geschlossenen Regelkreises eine der Methoden aus den vorhergehenden Epilogen:

(i) `ode`: Direkte Simulation der als Funktion hinterlegten Dynamik - siehe Epilog 1

(ii) `ss` in Kombination mit `lsim` (weitere Funktionalitäten wie `step`): Zustandsraummodell des Gesamtsystems als State Space Model hinterlegen und Standardfunktionen nutzen - siehe Epilog 4 / Epilog 5

(iii) *Simulink* (nur MATLAB): Darstellung der Signalflüsse im System als Blockdiagramm - Epilog 3

In der Vorlagendatei `rst2_epilog6_N3_PI_control.m` sind die ersten beiden Varianten nochmals anhand eines Beispiels aufgezeigt.
Hinweis: Visualisieren Sie sich das Gesamtsystem im geschlossenen Regelkreis als **Blockdiagramm**, um erweiterte innere Zustände, externe Einflussgrößen und Zielausgänge besser einbinden zu können.

Verweis auf Klausuraufgaben

- Zeitdiskrete Regelung (bzw. Beobachtung):
  - Übungsklausur 6 (Winter 2012/13) Aufgabe 3 (Deadbeat Beobachter)
  - Übungsklausur 9 (Sommer 2014) Aufgabe 1 (Deadbeat Regler + Beobachter)
  - Übungsklausur 11 (Sommer 2016) Aufgabe 3 (Abtastung LTV System mit Euler-Approximation)
  - Übungsklausur 12 (Winter 2016/17) Aufgabe 4
  - Übungsklausur 15 (Sommer 2018) Aufgabe 2
- Polvorgabe:
  - Übungsklausur 1 (Sommer 2010) Aufgabe 2 + Aufgabe 3
  - Übungsklausur 2 (Winter 2010/11) Aufgabe 3
  - Übungsklausur 4 (Winter 2011/12) Aufgabe 1 (f) + Aufgabe 3
  - Übungsklausur 5 (Sommer 2012) Aufgabe 1 (b) + Aufgabe 2
  - Übungsklausur 7 (Sommer 2013) Aufgabe 4
  - Übungsklausur 8 (Winter 2013/14) Aufgabe 3
  - Übungsklausur 15 (Sommer 2018) Aufgabe 4
  - Übungsklausur 17 (Sommer 2019) Aufgabe 1 (d)
- PI Zustandsregler:
  - Übungsklausur 3 (Sommer 2011) Aufgabe 4
  - Übungsklausur 6 (Winter 2012/13) Aufgabe 2
  - Übungsklausur 9 (Sommer 2014) Aufgabe 3
  - Übungsklausur 12 (Winter 2016/17) Aufgabe 3
  - Übungsklausur 13 (Sommer 2017) Aufgabe 4
  - Übungsklausur 16 (Winter 2018/19) Aufgabe 4

Weiterführende Literatur & Links

Videos:

- State feedback
  `https://www.youtube.com/watch?v=8KU5AQMdEMA`
- Anwendung der Formel von Ackermann
  `https://www.youtube.com/watch?v=y6rmkegrcyE`
- Pole placement
  `https://www.youtube.com/watch?v=FXSpHy8LvmY`

Erweiterte Themenfelder:

- Ausgangsrückführung (PID-Regler): [1, pp.317] $\rightarrow$ Vergleich mit Methoden aus RST1
- Optimale Regelung (Einführung): [2, pp.179] $\rightarrow$ Vertiefung in RST3

[1] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1 & 2*. Springer, 1995

[2] OLSDER, G. ; WOUDE, J. van d.: *Mathematical Systems Theory*. 3. Auflage. VSSD, 2004

[3] RUGH, W.: *Linear System Theory*. 2. Auflage. Prentice Hall, 1996