Regelungs- und Systemtechnik 2 - Übung 1

WS19/20

Thema: **Mathematische Grundlagen & Modellbildung**

(*keywords*: Jordannormalform, nilpotente Matrizen, Matrix-Exponentialfuntkion, Zustandsraumdarstellung, Modellvereinfachungen, LTI System)

Wiederholung: Jordansche Normalform

Satz 1 (Transformation auf Jordansche Normalform) *Zu jeder komplexen $n \times n$ Matrix A existiert eine reguläre komplexe $n \times n$ Matrix T, mit der A auf folgende Gestalt transformiert werden kann:*

$$T^{-1}AT = J := \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix} \text{ mit } J_i = \begin{pmatrix} J_{i1} & & & 0 \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{il_i} \end{pmatrix} \text{ und } J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, j = 1 \dots l_i$$

Die Blockdiagonalmatrizen J_i heißen Jordan-Kästen, die Matrizen J_{ij} Jordan-Kästchen. Die Matrix J nennt man Jordansche Normalform von A. Sie ist bis auf Vertauschung der J_{ij} durch A eindeutig bestimmt. Die Einträge λ_i bezeichnen die Eigenwerte von A.

Bemerkung: Die Dimension des Jordan-Kastens J_i entspricht der algebraischen Vielfachheit des Eigenwertes λ_i. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ_i entspricht der Anzahl l_i der Jordan-Kästchen im Jordan-Kasten J_i.

Beispiel

Gegeben ist folgende Matrix in Jordanscher Normalform:

$$J = \left(\begin{array}{c:c} J_1 & 0 \\ \hdashline 0 & J_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc:ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & & & \lambda_1 & & & \\ \hdashline & & & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & & & 0 & \lambda_2 & \\ & & & & & & & & \lambda_2 \end{array}\right)$$

Diese Matrix besteht aus dem Jordan-Kasten J_1 zum Eigenwert λ_1 und dem Jordan-Kasten J_2 zum Eigenwert λ_2. J_1 hat 3 Jordan-Kästchen, J_2 hat 2 Jordan-Kästchen. Somit ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{aligned} \text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_1) &= \dim(J_1) = 6 \\ \text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_2) &= \dim(J_2) = 3 \\ \text{mult}_{\text{geo}}(\lambda_1) &= \text{card}\{J_{11}, J_{12}, J_{13}\} = l_1 = 3 \\ \text{mult}_{\text{geo}}(\lambda_2) &= \text{card}\{J_{21}, J_{22}\} = l_2 = 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Jordannormalform

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Überlegen Sie sich die Eigenwerte sowie die algebraische und geometrische Vielfachheit der Matrix J. Verwenden Sie dabei den Satz und die Bemerkung von oben.

2. Jedes Jordan-Kästchen läßt sich in eine Summe aus 2 Matrizen zerlegen:

$$J_{ij} = \Lambda_{ij} + N_{ij}$$

   mit der Diagonalmatrix der Eigenwerte

$$\Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

   und der nilpotenten Matrix

$$N_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Eine Matrix heißt nilpotent, wenn gilt $A^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$, k=Nilpotenzindex.

   (a) Weisen Sie nach, daß die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   nilpotent ist und geben Sie k an.

   (b) Berechnen Sie das Produkt NA mit einer beliebigen Matrix A. Was können Sie feststellen?

Aufgabe 2: Modell eines Tiefsetzstellers

Es soll die Zustandsraumdarstellung für einen Tiefsetzsteller (engl. *buck converter*) hergeleitet werden. Der elektrische Aufbau ist in Abbildung 1 gegeben.

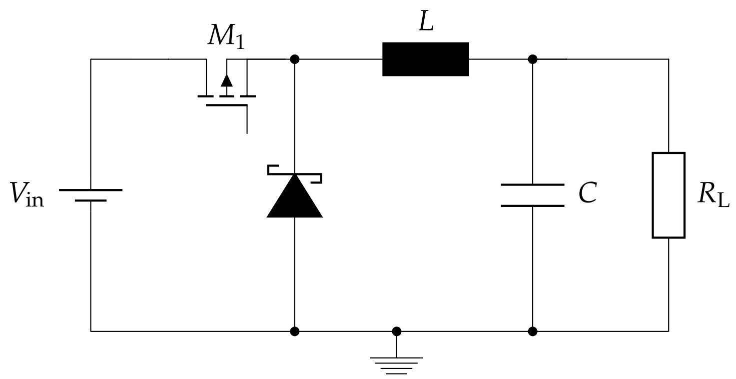

Abbildung 1: Schaltung eines Tiefsetzstellers mit Last

1. Vereinfachen Sie die dargestellte Schaltung mit Hilfe der Annahme, dass die Ansteuerung per Pulsweitenmodulation (PWM) sehr schnell im Vergleich zur Dynamik des Systems erfolgt.
2. Identifizieren Sie alle Energiespeicher im System. Durch welche elektrische Größe kann die Energie im jeweiligen Bauteil beschrieben werden?
3. Stellen Sie für die vereinfachte Schaltung die elektrischen Zusammenhänge mit den Kirchhoffschen Regeln dar. Ermitteln Sie aus den Zusammenhängen die Differentialgleichungen für die zuvor bestimmten elektrischen Größen der Energiespeicher.
4. Bringen Sie das System in die Standardform

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x + D\,u \end{aligned}$$

   mit den Matrizen A, B, C und D. Dabei soll als Ausgang y die Spannung über dem Lastwiderstand und als Eingang die mittlere Schalterstellung u betrachtet werden.
5. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A. Welchen Einfluss hat der Lastwiderstand R_{L} auf die Eigenwerte?