Regelungs- und Systemtechnik 2 - Übung 2

WS19/20

Thema: **Linearisierung an Ruhelagen & Trajektorien**

(*keywords*: Ruhelagen, Betriebspunkte, Taylorentwicklung, Peano-Baker Reihe)

Aufgabe 1: Betriebpunkte von LTI-Systemen

Für ein lineares zeitinvariantes System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ sollen für ein fixes $u_R \in \mathbb{R}^p$ mit $u_R \neq 0$ alle Arbeitspunkte (x_R, u_R) in Abhängigkeit von A, B bestimmt werden. (**Hinweis:** Untersuchen Sie die Lösbarkeit des autretenden Gleichungssystems.) Betrachten Sie hierzu auch folgende Paare (A, B).

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}$

Was ändert sich wenn zusätzlich $u_R = 0$ betrachtet wird?

Aufgabe 2*: Linearisierung an einer Ruhelage [1]

Gegeben sei das folgende nichtlineare zeitinvariante System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1^3 + 3\sin(x_2) + 3x_1 u \\ \dot{x}_2 &= e^{x_1} + x_2 - 1 \\ y &= x_1^2 x_2 \end{aligned}$$

(a) Bringen Sie das System auf die übliche Darstellung $\dot{x} = f(x,u)$, $y = h(x,u)$.

(b) Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $u_\text{R} = x_{1,\text{R}} = x_{2,\text{R}} = 0$.

Aufgabe 3: Linearisierung entlang einer Trajektorie

In dieser Aufgabe wird die Bewegung eines Satelliten betrachtet, der den Erdmittelpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ im Abstand $r(t)$ umrundet (vgl. Abb. 1). Die Bewegungsgleichungen des Keplerschen Zweikörperproblems sind gegeben durch:

$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\varphi}^2(t) - \frac{\gamma}{r^2(t)} + u_1(t) \tag{2a}$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{-2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t)}{r(t)} + \frac{u_2(t)}{r(t)} \tag{2b}$$

Vereinfachende Annahmen:

- Der Satellit (m) und die Erde (M) werden als Punktmassen angenommen, sodass die Gravitationskraft $|F_G| \sim 1/r^2$ ist.

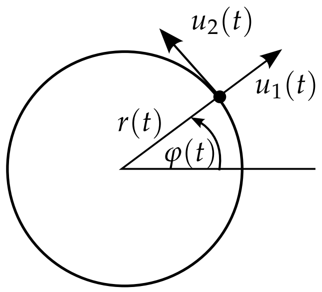

Abbildung 1: Satellit bewegt sich auf einer Kreisbahn.

- Die Wirkung der Steuerdüsen wird zur radialen und tangentialen Beschleunigung $u_1(t)$ und $u_2(t)$ zusammengefasst.

(a) Bringen Sie das System 4. Ordnung in (2) auf die übliche Zustandsdarstellung $\dot{x} = f(x, u)$, mit den Zuständen

$$x_1(t) = r(t), \qquad x_2(t) = \dot{r}(t), \qquad x_3(t) = \varphi(t), \qquad x_4(t) = \dot{\varphi}(t).$$

Der Ausgang y ist mit $y(t) = \begin{pmatrix} r(t) & \varphi(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ gegeben.

(b) Überprüfen Sie, dass die nominale Trajektorie

$$\tilde{r}(t) = r_0, \qquad \tilde{\varphi}(t) = \omega_0 t + \varphi_0 \qquad \text{mit:} \qquad \omega_0 = \sqrt{\gamma / r_0^3} \tag{3}$$

die nichtlinearen Differenzialgleichungen (2) mit dem Eingang $\tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t) = 0, t \geq 0$ und den Anfangswerten $x(0) = \begin{pmatrix} r_0 & 0 & \varphi_0 & \omega_0 \end{pmatrix}^\top$ erfüllt. (Hinweis: Einsetzen!)

(c) Der Satellit soll nun von einer stationären Bahn (r_0, ω_0) in eine andere stationäre Bahn (r_1, ω_1) wechseln. Die Transition (vgl. Abb. 2) ist gegeben durch:

$$\hat{r}(t) = \frac{r_0 - r_1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\Delta T} t\right) + \frac{r_0 + r_1}{2} \qquad = k_1 \cos(\omega t) + k_0 \tag{4a}$$

$$\dot{\hat{\varphi}}(t) = \frac{\omega_0 - \omega_1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\Delta T} t\right) + \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} \qquad = l_1 \cos(\omega t) + l_0 \tag{4b}$$

mit $\omega_i = \sqrt{\gamma / r_i^3}$. Berechnen Sie die benötigten Eingänge $\hat{u}(t)$ und den Verlauf der Zustände $\hat{x}(t)$ während des Bahnübergangs.

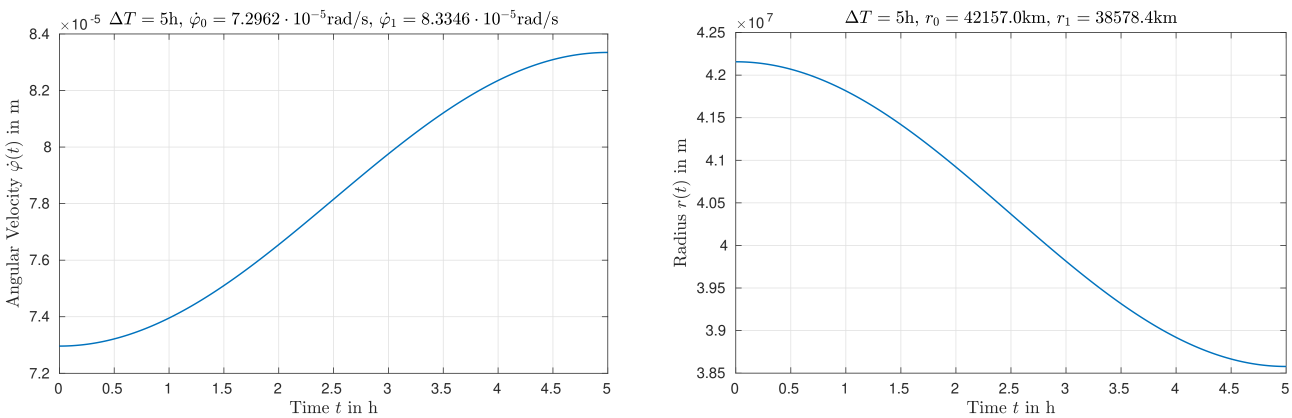

Abbildung 2: Transition von zwischen zwei Kreisbahnen.

[1]Aufgaben, die mit $\star$ gekennzeichnet sind, sollen in der Übung selbstständig berechnet werden.

(d) Linearisieren Sie nun $\dot{x} = f(x, u)$ entlang der Nominaltrajektorie (4). Verwenden Sie dabei die Differenzgrößen $\Delta x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ und $\Delta u(t) = u(t) - \hat{u}(t)$.

(e) Linearisieren Sie nun $\dot{x} = f(x, u)$ entlang der Nominaltrajektorie (3). Verwenden Sie dabei die Differenzgrößen $\Delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ und $\Delta u(t) = u(t)$. Welcher besondere Fall liegt hier vor?

Aufgabe 4: Lösung linearer zeitvarianter Systeme

Berechnen Sie die Lösung $x(t) = \Phi(t, 0)x(0)$ der folgenden linearen Systeme durch Separation der Variablen und Variation der Konstanten bzw. für (a) auch anhand der Peano-Baker-Reihe:

(a)

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix} x(t),\ x(0) = x_0$$

(b)

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-t}{1+t^2} & 1 \\ 0 & \frac{-4t}{1+t^2} \end{pmatrix} x(t),\ x(0) = x_0$$

Berechnen Sie außerdem für (b) den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t, 0)x(0)$.