Regelungs- und Systemtechnik 2 - Übung 3

WS19/20

Thema: **Analytische Lösung von LTI-Systemen**

(*keywords*: Lösung (analytisch), Jordannormalform, Ähnlichkeitstransformation, Matrix-Exponentialfuntkion, Zustandsraumdarstellung, LTI System, Folgeregelung, Vorsteuerung)

Aufgabe 1: Analytische Lösung

Gegeben seien die folgenden einfachen Differentialgleichungssysteme:

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, x(0) = x_0$

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, x(0) = x_0$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x, x(0) = x_0$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x, x(0) = x_0$

e) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x, x(0) = x_0$

Lösen Sie die Differentialgleichungssysteme und vergleichen Sie die erhaltenen Ergebnisse.

Aufgabe 2: Modellfolgeregelung

Es wird ein permanenterregter Gleichstrommotor betrachtet. Dieser hat das Trägheitsmoment J, die Induktivität der Wicklungen L, den Widerstand der Wicklungen R, die dynamische Reibung B_m und die Motorkonstante K. Im Motor fließt der Motorstrom $i_\mathrm{a}(t)$, der Motor dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ mit $[\omega(t)] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Die Eingangsgröße ist die anliegende Spannung $v(t)$.

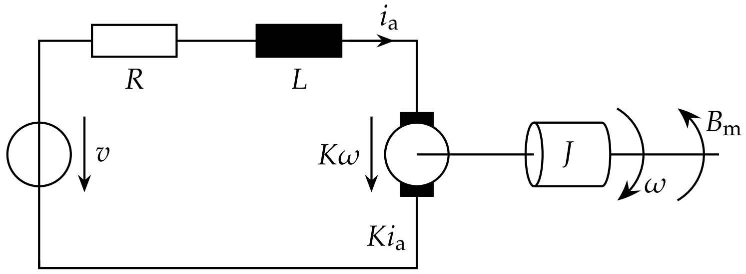

Abbildung 1: permanenterregter Gleichstrommotor

Die Motordynamik genügt den Differentialgleichungen:

$$L\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{a}(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) - Ri_\mathrm{a}(t) - K\omega(t)$$
$$J\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = Ki_\mathrm{a}(t) - B_\mathrm{m}\omega(t)$$

Um leichter rechnen zu können, teilen wir durch L bzw. J, setzen $x_1(t) = i_\mathrm{a}(t), x_2(t) = \omega(t)$, und fassen die Parameter mit den Konstanten $a_1, \ldots a_4, b_1$ zusammen:

$$\dot{x}_1(t) = b_1 v(t) - a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) \qquad b_1 = \frac{1}{L},\ a_1 = \frac{R}{L},\ a_2 = \frac{K}{L}$$

$$\dot{x}_2(t) = a_3 x_1(t) - a_4 x_2(t) \qquad a_3 = \frac{K}{J},\ a_4 = \frac{B_\mathrm{m}}{J}$$

(a) Bringen Sie das System auf die übliche Darstellung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit dem Zustand $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ und dem Eingang $u(t) = v(t)$.

(b) Wählen Sie als Ausgang die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des Motors, d.h. $y(t) = x_2(t)$. Drücken Sie den Eingang $u^\star(t)$ als Funktion von einem gewünschten Ausgangsverlauf $y^\star(t)$ und dessen Zeitableitungen aus, d.h. bestimmen Sie eine Funktion φ, so dass gilt

$$u^\star(t) = \varphi(y^\star(t), \dot{y}^\star(t), \ldots, y^{\star(n)}(t)).$$

(c) Nun wird ein gewünschtes Sollverhalten anhand eines Referenzsystems

$$\dot{x}^\star(t) = Ax^\star(t) + Bu^\star(t)$$

mit dem Referenzzustand $x^\star(t)$ und dem zugehörigen Referenzeingang $u^\star(t)$ formuliert. Die Fehlerkoordinaten $e(t) := x(t) - x^\star(t)$, $e_u(t) := u(t) - u^\star(t)$ geben die Abweichung vom gewünschten Referenzverhalten an. Wie lautet die Zustandsgleichung des Systems in Fehlerkoordinaten? Ist das Fehlersystem zeitinvariant oder zeitvariant?

(d) Zur Regelung soll eine proportionale Fehlerrückführung

$$e_u(t) = k_1\, e_1(t) + k_2\, e_2(t)$$

mit $k_1, k_2 = \text{const.}$ herangezogen werden. Wie müssen k_1, k_2 qualitativ gewählt werden, damit der Fehlerzustand gegen null konvergiert?

(e) Zuletzt soll ein Gleichstrommotor mit geeigneten Parameterwerten betrachtet werden. Dabei wird anhand von Simulationsergebnissen das Verhalten für verschiedene Reglerparameter präsentiert.
Hinweis: Die Simulationsergebnisse sind abrufbar unter:
`https://www.tu-ilmenau.de/fileadmin/public/regelungstechnik/Lehre/RST2/folie-loes-rst2-uebung3.pdf`