Regelungs- und Systemtechnik 2 - Übung 4

WS19/20

Thema: **Stabilität zeitkontinuierlicher LTI-Systeme**

(*keywords*: Laplacebereich, Übertragungsfunktion, Pole und Eigenwerte, Stabilität, Gesamtenergie)

Aufgabe 1: Laplacetransformation

Es sei das lineare zeitinvariante SISO-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ mit Hilfe der Laplacetransformation unter Annahme verschwindender Anfangsbedingungen.

(b) Nehmen Sie nun den Fall ohne Durchgriff an, d. h. $D = 0$. Zeigen Sie, dass die Pole von $G(s)$ auch Eigenwerte der Dynamikmatrix A sind. Geben Sie an, unter welcher Bedingung die Eigenwerte von A mit den Polen der Übertragungsfunktion $G(s)$ zusammenfallen.

(c) Nun sei ein System mit Ausgang $y_1 = C_1 x$ bzw. $y_2 = C_2 x$ gegeben, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils $G(s)$. Was stellen Sie fest, wenn Sie Pole und Eigenwerte vergleichen?

Aufgabe 2: Stabilität und Gesamtenergie

Gegeben ist das folgende vereinfachte Modell eines Tiefsetzstellers (buck-converter):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Dabei bezeichnet die Zustandsgröße x_1 den Strom durch eine Spule mit Induktivität L und die Zustandsgröße x_2 die Spannung, welche an einem Kondensator mit Kapazität C und an der Last mit Widerstand R abfällt. Der Tiefsetzsteller wird mit der Eingangsspannung E gespeist und kann mit der von außen vorgebbaren Stellgröße u geregelt werden. Alle Konstanten R, L, C und E sind positiv.

Zunächst sei das System ungesteuert ($u \equiv 0$), d. h. wir betrachten das freie System.

(a) Zeigen Sie mit dem Hurwitz-Kriterium, dass das freie System asymptotisch stabil ist.

(b) Untersuchen Sie die Stabilität des freien Systems für den Fall unendlich großer Last R.

Im Weiteren sei das System nun gesteuert ($u \not\equiv 0$).

(c) Die Gesamtenergie in Spule und Kondensator lautet

$$V(x) = \frac{1}{2} L x_1^2 + \frac{1}{2} C x_2^2$$

Bestimmen Sie die zeitliche Änderung der Gesamtenergie entlang der Lösungstrajektorie

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x}$$

in Abhängigkeit der Zustandsgrößen x_1, x_2 und des Eingangs u.
Bestimmen Sie u als Funktion von x_1 und x_2 so, dass die Gesamtenergie V für alle $x_1, x_2 \neq 0$ mit der Zeit abnimmt. Sind hierfür alle Zustände x erforderlich? Welcher Zustand wird im Grenzfall unendlicher Zeit erreicht?