Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Humboldt-Hörsaal
Dienstag, den 20. 09. 2016
Beginn: 13.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	15	14	6	14	25	74
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

15 Punkte

Betrachten Sie das System

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Dynamikmatrix A. Ist das freie System $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ asympotisch stabil?

b) Transformieren Sie x in den neuen Zustand $z = T^{-1}\,x$, so dass A in Diagonalform $\bar{A}$ vorliegt. Geben Sie hierzu die Matrizen der transformierten Systemdarstellung

$$\dot{z}(t) = \bar{A}\,z(t) + \bar{B}\,u(t)$$

an.

c) Ist das transformierte System steuerbar? Gilt diese Aussage auch für das ursprüngliche System?

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenvektoren von A und dem Vektor B?

Aufgabe 2

14 Punkte

Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x(t)\,.$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das System asymptotisch stabil?

Sei im weiteren nun $\alpha = 1$.

b) Bestimmen Sie über die Lösung der Lyapunov-Gleichung eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x) = x^\top Px$ mit symmetrischer und positiv definiter Matrix P.

   Hinweis: Sie können den Ansatz $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ und $Q = I$ verwenden.

c) Bestimmen Sie eine untere Schranke für die Rate γ, mit der die Lyapunov-Funktion V entlang der Lösung des Systems abfällt. D.h. zeigen Sie, dass

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma\, V(x)$$

   für ein $\gamma > 0$ erfüllt ist.

   Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Matrixnorm für $x^\top P\, x$.

Aufgabe 3

6 Punkte

Das lineare zeitvariante System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad t_0 = 0$$

soll mit der äquidistanten, konstanten Abtastperiode T näherungsweise diskretisiert werden.

a) Für kleine T gilt näherungsweise der Differenzenquotient

$$\dot{x}(t) \approx \frac{1}{T}\Big(x((k+1)T) - x(kT) \Big) .$$

Bestimmen Sie damit die Matrizen $A_\mathrm{d} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $B_\mathrm{d} \in \mathbb{R}^2$ des angenäherten Abtastsystems

$$x(k+1) = A_\mathrm{d}(k)\, x(k) + B_\mathrm{d}(k)\, u(k) .$$

b) Betrachten Sie dieses Abtastsystem nun für $T \to 0$. Ist es in diesem Grenzfall steuerbar?

Aufgabe 4 **16 Punkte**

Für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{3s(s+1)(s-20)}{(s+p)(s+5)^2} = \frac{N(s)}{D(s)}, \qquad p \in \mathbb{R}$$

soll eine Realisierung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}$$

im Zustandsraum berechnet werden.

a) Ermitteln Sie die Matrizen A, B, C und D der Realisierung.

b) Warum ist die Realisierung für $p = 0$ nicht steuerbar bzw. nicht beobachtbar?

c) Für welche weiteren Werte von p ist dies ebenso der Fall?

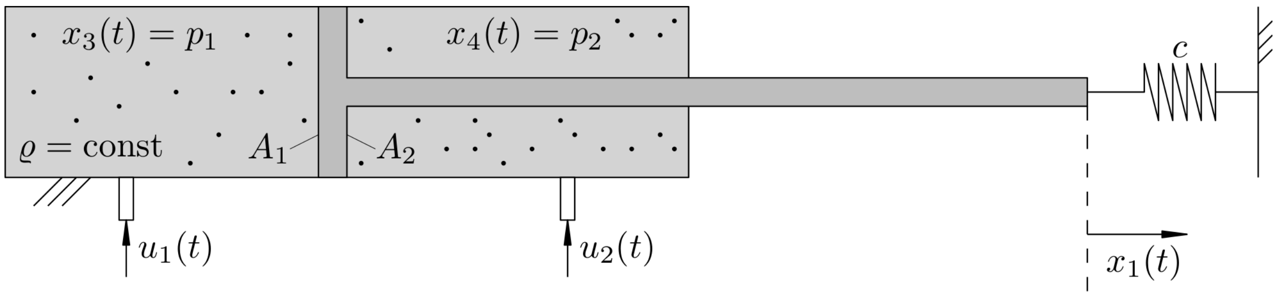

Abbildung 1: Schema eines zweiseitigen Hydraulikzylinders.

Aufgabe 5 **25 Punkte**

Die Zustandsdarstellung eines idealisierten, leckagefreien Hydraulikzylinders (vgl. Abb. 1) lautet:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m_0 + \underbrace{\varrho(A_1 - A_2)}_{m_1} x_1(t)} \left(-c x_1(t) - \beta x_2(t) + A_1 x_3(t) - A_2 x_4(t)\right) \\
\dot{x}_3(t) &= \frac{1}{V_{01} + A_1 x_1(t)} \left(u_1(t) - A_1 x_2(t)\right) \\
\dot{x}_4(t) &= \frac{1}{V_{02} - A_2 x_1(t)} \left(u_2(t) + A_2 x_2(t)\right)
\end{aligned}$$

a) Ermittels Sie alle stationären Betriebspunkte $(\tilde{x}, \tilde{u})$ in Abhängigkeit der Vorgabe von $\tilde{x}_3$ und $\tilde{x}_4$.

b) Bestimmen Sie die Matrizen A und B der Linearisierung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x(t) = A\,\Delta x(t) + B\,\Delta u(t) \quad \text{mit} \quad \Delta x(t) = x(t) - \tilde{x}, \quad \Delta u(t) = u(t) - \tilde{u}$$

bzgl. des Arbeitspunkts mit $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)^\top = \left(\frac{1-m_0}{m_1},\ 0,\ p_0,\ p_0\right)$ und $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)^\top = (0,\ 0)$.

Hinweis: Benutzen Sie folgende Vereinfachungen:

$$\beta = 1, \qquad V_r = V_{01} + A_1 \tilde{x}_1, \qquad V_l = V_{02} - A_2 \tilde{x}_1\,.$$

c) Untersuchen Sie die Beobachtbarkeit des linearisierten Systems bzgl. Kolbenposition $y = x_1$.

Für eine Regelung werden die Kolbenposition sowie der rechtsseitige Kolbendruck herangezogen. Hierzu wird $y = (x_1,\ x_3)^\top$ gemessen.

d) Wie ist der Vektorrelativgrad des Systems?

e) Ist das linearisierte System statisch entkoppelbar?