Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Audimax
Mittwoch, den 13. 02. 2019
Beginn: 13.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	15	14	15	21		65
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

15 Punkte

Gegeben sei ein System in der Zustandsdarstellung

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix} x(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Gehen Sie zunächst von bekannten Koeffizienten aus.

a) Geben Sie das zugehörige Beobachtersystem an und bestimmen Sie die Beobachterverstärkung in Abhängigkeit der Parameter so, dass die Beobachterfehlerdynamik den dreifachen Eigenwert -1 aufweist.

Seien die Koeffizienten nun nur als Intervallen zugehörig bekannt, d.h. $a \in [1, 2]$, $b \in [3, 4]$, $c \in [1, 2]$. Überlegen Sie sich, wie Sie die Dynamikmatrix des Beobachtersystems und die Beobachterverstärkung zu wählen haben.

b) Bestimmen Sie die Beobachterverstärkung so, daß im Falle bekannter Parameter die Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamik auf den dreifachen Eigenwert -1 zu liegen kommen.

c) Legen Sie das Beobachtersystem so fest, daß die Beobachterfehlerdynamik stabil ist, egal wie die Parameter a, b und c in den Intervallen liegen.

Hinweis: Nutzen Sie die Beobachternormalform.

Aufgabe 2

14 Punkte

Gegeben sei das System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} u(t)$$

mit Anfangszustand $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^\top$.

a) Geben Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0)$ an.

b) Berechnen Sie die Steuerbarkeits-Gramsche $W(t_0, t)$. Ist das System auf dem Intervall $t \in [0, 10]$ steuerbar?

c) Bestimmen Sie das Eingangssignal $u = u(t)$ für $t \in [0, 10]$, das den Anfangszustand in den Zustand $x(10) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$ überführt.

d) Bestimmen Sie $u(t)$ für $t > 10$, damit der Zustand im Ursprung gehalten wird.

Hinweis: Die Aufgabe d) kann unabhängig von b) gelöst werden.

Aufgabe 3

15 Punkte

Betrachten Sie das folgende System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

mit dem Ausgang

$$y(t) = x_1(t)\,.$$

a) Bestimmen Sie den Relativgrad von y.

b) Geben Sie die Menge $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \equiv 0\}$ an, die den Teil des Zustandsraumes charakterisiert, der am Ausgang y nicht sichtbar ist.

c) Bestimmen Sie die resultierende Nulldynamik und zeigen Sie, dass diese minimalphasig ist. Kann für u ein beschränktes Folgeregelungsgesetz gefunden werden?

   Hinweis: Wenn Sie im Zeitbereich rechnen, eliminieren Sie den Eingang u.

d) Wie oft muss die Referenztrajektorie $y^\star = y^\star(t)$ mindestens differenzierbar sein? Geben Sie für u ein Folgeregelungsgesetz mit I-Anteil an, das den Ausgang y zu $y^\star$ einregelt, und die Pole der erweiterten Dynamik des Fehlers $e := y^*(t) - y$ auf $-1, -2, -3$ legt.

e) Bestimmen Sie einen Ausgang $y_\mathrm{f}(t) = C_\mathrm{f}\, x(t)$, der keine interne Dynamik aufweist.

   Hinweis: Nutzen Sie die Systemdarstellung in Regelungsnormalform.

Aufgabe 4

21 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das System vollständig steuerbar ist.

Das System soll mit einem PI-Zustandsregler der Form

$$u(t) = k^\top x(t) + K_\mathrm{P}\, e(t) + K_\mathrm{I} \int_0^t e(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

mit $K_\mathrm{P} \in \mathbb{R}$, $K_\mathrm{I} \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}^2$ geregelt werden. Der Regelfehler sei definiert als $e(t) = r - y(t)$.

b) Das System wird nun um den Integriererzustand

$$x_\mathrm{I}(t) = \int_0^t e(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

erweitert und auf die Form

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

mit erweitertem Zustand $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_\mathrm{I} \end{pmatrix}$ gebracht. Ermitteln Sie die Matrizen $\bar{A}$ und $\bar{B}$.

c) Zeigen Sie, dass das erweiterte System vollständig steuerbar ist.

d) Alle Eigenwerte des erweiterten Systems sollen mit $u(t) = \bar{k}^\top \bar{x}(t) + K_\mathrm{P}\, r$ auf -4 (mehrfach) gelegt werden. Berechnen Sie $\bar{k}$.

e) Parameter K_P soll so ausgelegt werden, dass der Ausgang des Originalsystems ohne Integriererzustand bei $r =$ konst. stationär genau ist. Bestimmen Sie K_P, K_I und k.

f) Seien $R(s)$ die Laplace-Transformierte von r und $Y(s)$ die Laplace-Transformierte von $y(t)$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ des geschlossenen Regelkreises. Geben Sie die Nullstellen von $G(s)$ an.