Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Audimax

Mittwoch, den 26. 02. 2020

Beginn: 13.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Studiengang: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	20	15	19	16		70
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

20 Punkte

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{2}x_2(-x_1+1)^2 - x_1 - 1 \\
\dot{x}_2 &= -2x_2 \\
\dot{x}_3 &= (x_1-1)(1+x_3^2) + 2\sqrt{x_3} - 4\mathrm{e}^{x_2} + 2u + 4
\end{aligned}$$

a) Linearisieren Sie das System am Arbeitspunkt mit $x_1^\star = -1$, $x_2^\star = 0$, $x_3^\star = 1$, $u^\star = 1$, d.h. geben Sie die Matrizen A zund B bzgl.

$$\Delta\dot{x} = A\,\Delta x + B\,\Delta u$$

an mit $\Delta x = x - x^\star$ und $\Delta u = u - u^\star$.

b) Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren der Dynamikmatrix des linearisierten Systems?

c) Transformieren Sie das linearisierte System auf Jordan-Normalform.

d) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0)$ des linearisierten Systems in Originalkoordinaten.

e) Berechnen Sie die Lösung des linearisierten Systems für $u \equiv 0$ bzgl. folgender Anfangswerte in Originalkoordinaten: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -2$, $x_3(0) = 1$.

Hinweis: Wenn Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, verwenden Sie ab Aufgabe b) die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

15 Punkte

Gegeben sei das **zeitkontinuierliche** System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zunächst soll eine **zeitkontinuierliche** Zustandsrückführung $u(t) = k^\top x(t) + fr$ als Festwertregler mit Vorfilter entworfen werden.

a) Ist das Paar (A, B) steuerbar?

b) Bestimmen Sie die Reglerverstärkung k so, dass die Eigenwerte der Dynamikmatrix im geschlossenen Regelkreis bei $\lambda_{1,2} = -2$ liegen.

c) Bestimmen Sie das Vorfilter f so, dass für die stationäre Verstärkung des geschlossenen Regelkreises $\frac{y_\mathrm{s}}{r_\mathrm{s}} = 1$ gilt.

Die Zustandsrückführung soll nun für das äquidistant abgetastete System analysiert werden. Die Abtastung mit Abtastzeit $T > 0$ führt zum **zeitdiskreten** System

$$\begin{aligned} x(i+1) &= A_\mathrm{d} x(i) + B_\mathrm{d} u(i) \\ y(i) &= Cx(i) \end{aligned}$$

mit

$$A_\mathrm{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\mathrm{d} = \begin{pmatrix} T \\ -\frac{T^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das **zeitdiskrete** System soll mit dem Regelgesetz $u(i) = k^\top x(i) + fr$ mit k und f aus b) und c) geregelt werden.

d) Untersuchen Sie die Stabilität des geschlossenen Regelkreises für eine Abtastzeit von $T = \frac{1}{4}$.

e) Bestimmen Sie den stationären Endwert y_s des geschlossenen Regelkreises für eine Abtastzeit von $T = \frac{1}{4}$ bei einer konstanten Referenz $r_\mathrm{s} = 2$.

Aufgabe 3

19 Punkte

Gegeben ist das folgende System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\,d(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit unbekanntem Störeingang $d(t) \in \mathbb{R}$ und Messgröße $y(t) \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Beobachtbarkeitsmatrix und zeigen Sie, dass (C, A) beobachtbar ist.

b) Transformieren Sie das System auf Beobachtungs-Normalform mit transformiertem Zustand $x_o = P^{-1}x$. Geben Sie die Transformationsmatrix P sowie die Matrizen $A_o = P^{-1}AP$, $B_o = P^{-1}B$ und $C_o = CP$ an.

c) Geben Sie einen Beobachter für den Zustand x_o an und entwerfen Sie die Verstärkung $L_o \in \mathbb{R}^2$ so, dass alle Eigenwerte der Schätzfehlerdynamik $A_o + L_oC_o$ bei -1 liegen.

d) Gegeben ist nun ein Beobachter mit Integriereranteil der Form

$$\dot{\hat{x}}_o(t) = A_o\hat{x}_o(t) + L_o\big(\hat{y}(t) - y(t)\big) + l\,B_o \int_0^t \hat{y}(\tau) - y(\tau)\,d\tau$$

mit $l \in \mathbb{R}$ und dem Ausgangsintegriererzustand $x_{\mathrm{I}} = \int_0^t \hat{y} - y\,d\tau$. Geben Sie die Zustandsgleichung zum Beobachterfehlerzustand $\bar{x} = (e^\top, x_{\mathrm{I}})^\top$ an mit dem Schätzfehler $e = \hat{x}_o - x_o$.

Zeigen Sie, dass mit L_o aus c) und $l = -1$ das erweiterte System asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Falls Sie c) nicht gelöst haben, können Sie mit $L_o = (-1,\ -1)^\top$ rechnen.

e) Bestimmen Sie den stationären Schätzfehler $e_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} e(t)$ für eine konstante Störung d. Welchen Einfluss hat diese auf e_∞?

Aufgabe 4

16 Punkte

Gegeben sei das MIMO-System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

mit einem Parameter $p \in \mathbb{R}$.

a) Für welche p ist das System statisch entkoppelbar? Bestimmen Sie jeweils in Abhängigkeit von p den Vektorrelativgrad $d = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \end{pmatrix}$ des Systems. Für welche p weist das System eine interne Dynamik auf?

b) Bestimmen Sie jeweils in Abhängigkeit von p das Entkopplungsregelgesetz $u(t) = K\,x(t) + F\,r$ so, dass das System die Form

$$y_1^{(d_1)}(t) = r_1 \qquad\qquad y_2^{(d_2)}(t) = r_2$$

mit $r^\top = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ annimmt.

c) Betrachten Sie nun den Fall mit interner Dynamik. Wählen Sie die Matrix R bzgl. $r = R\,x$ so, dass alle Eigenwerte in der mit $u(t) = K\,x(t) + F\,r$ entkoppelten Dynamik aus Teilaufgabe b) bei -1 liegen. Ist der geschlossene Regelkreis stabil?