Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Helmholtz-Hörsaal

Freitag, den 18. 09. 2020

Beginn: 11.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	12	17	22	14		65
erreichte Punkte						
					Note	

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Aufgabe 1 **12 Punkte**

Betrachten Sie ein System mit Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2},$$

d.h. es gilt $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ bzgl. Eingangsgröße $u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(s)$ und Ausgangsgröße $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$.

Zur Korrektur eines Sensor-Offsets wird die Eingangsgröße u über ein Hochpassfilter gemäß

$$U(s) = \frac{s+a}{s+5}\, V(s)$$

mit $v(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, V(s)$ in das System eingespeist.

a) Bestimmen Sie eine steuerbare Realisierung für die Übertragungsfunktion $G(s)$. Ist das freie System ($u \equiv 0$) stabil?

b) Geben Sie in Abhängigkeit von a eine steuerbare Realisierung für das Gesamtsystem mit dem Eingang v und dem Ausgang y an. Welche Ordnung hat das Gesamtsystem?

c) Für welche $a > 0$ ist das System aus b) nicht beobachtbar?

d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist der Ursprung der Realisierung aus b) im freien System ($v \equiv 0$) stabil?

Aufgabe 2

17 Punkte

Gegeben sei das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} x.$$

a) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems für $u \equiv 0$ anhand der Lage der Eigenwerte.

Als Regler soll nun

$$u = \begin{bmatrix} (k_1 - 3k_2) & -k_2 \end{bmatrix} x + k_1 x_\mathrm{I} + \left(\frac{1}{3}k_1 - k_2\right) r$$

betrachtet werden. Dabei gilt $\dot{x}_\mathrm{I} = r - y$ mit Referenz $r \equiv$ konst.

b) Setzen Sie das Regelgesetz ein und bestimmen Sie die Dynamik des geschlossenen Regelkreises.

Hinweis: Erweitern Sie das System um den Zustand x_I.

c) Bestimmen Sie die größtmöglichen Bereiche für $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, für die der geschlossene Regelkreis asymptotische Stabilität aufweist. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Hinweis: $(3a + b)(a - 3) = 3a^2 + ab - 9a - 3b$

d) Seien nun $k_1 = -9$, $k_2 = 6$ und $r = 1$. Bestimmen Sie die stationären Zustände und den stationären Ausgang, falls diese existieren. Ist das geregelte System stationär genau?

Aufgabe 3

22 Punkte

Gegeben sei das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

a) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$ so, dass die Eigenwerte im geschlossenen Regelkreis bei $\lambda_{1,2} = -1$ liegen.

Gegeben sei nun der Beobachter

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + L\,(\hat{y} - y)$$
$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x},$$

mit der Beobachterverstärkung $L = \begin{pmatrix} -10 & -30 \end{pmatrix}^\top$.

b) Ist die Schätzfehlerdynamik asymptotisch stabil?

Mit Hilfe des erweiterten Zustands $z = \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}$ ergibt sich der mit dem Regelgesetz $u = k_1 \hat{x}_1 + k_2 \hat{x}_2$ geschlossene Regelkreis zu

$$\dot{z}(t) = A_z\, z(t)$$

c) Bestimmen Sie die Matrix A_z und geben Sie deren Eigenwerte an.

Zum Vergleich wird nun der Zustand x_2 mit Hilfe des Filtersystems

$$\dot{\eta} = \Lambda \eta + \Lambda y$$
$$\hat{x}_2 = -\Lambda \eta - \Lambda y$$

mit $\Lambda < 0$ geschätzt.

d) Sei $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$ und $\hat{x}_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \hat{X}_2(s)$. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion von $Y(s)$ nach $\hat{X}_2(s)$. Charakterisieren Sie das Übertragungsverhalten des Filters für niedrige Frequenzen.

Mit dem angepassten Regelgesetz $u = k_1 y + k_2 \hat{x}_2$ wird nun der Regelkreis geschlossen.

e) Bestimmen Sie die Dynamik im geschlossenen Regelkreis mit erweitertem Zustand $\bar{z} = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}$.

f) Bestimmen den Bereich für $\Lambda < 0$ so, dass die Dynamik im geschlossenen Regelkreis asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Nutzen Sie das Hurwitz Kriterium.

Aufgabe 4 **14 Punkte**

Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,d \\ y &= C\,x \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $x(t) \in \mathbb{R}^2$ der Zustand, $d \in \mathbb{R}$ eine unbekannte konstante Störung und $y(t) \in \mathbb{R}$ der bekannte Messausgang sind.

Gegeben ist weiterhin ein Beobachteransatz mit Integriereranteil der Form

$$\dot{\hat{x}} = A\,\hat{x} + L\,(\hat{y} - y) + B\,w\,, \qquad w = L_{\mathrm{I}} \int_0^t \big(\hat{y}(\tau) - y(\tau)\big) d\tau\,,$$

wobei $L \in \mathbb{R}^2$, $L_{\mathrm{I}} \in \mathbb{R}$ und Ausgangsintegriererzustand $w(t) \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Beobachtbarkeitsmatrix des Systems und zeigen Sie, dass das Paar (C, A) beobachtbar ist.

b) Geben Sie die Dynamik des erweiterten Beobachterzustands $z = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ w \end{pmatrix}$ an, indem Sie bzgl.

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{L}(\hat{y} - y)\,, \quad y = \bar{C}z$$

die Matrizen $\bar{A}$ und $\bar{C}$ bestimmen mit $\bar{L} = \begin{pmatrix} L \\ L_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}$.

c) Zeigen Sie, dass das Paar $(\bar{C}, \bar{A})$ beobachtbar ist. Entwerfen Sie $\bar{L}$ derart, dass die Matrix $\bar{A} + \bar{L}\bar{C}$ nur Eigenwerte bei -1 aufweist.

d) Bestimmen Sie die Schätzfehlerdynamik zum Schätzfehler $e := \hat{x} - x$. Welche stationären Werte $e_{\mathrm{s}} = \lim_{t\to\infty} e(t)$ und $w_{\mathrm{s}} = \lim_{t\to\infty} w(t)$ ergeben sich im störungsfreien Fall $d = 0$?

   Hinweis: Falls Sie c) nicht gelöst haben, rechnen Sie mit $\bar{L} = [-3, -1, -1]^\top$ weiter.

e) Welchen Einfluss hat die Störung $d = 2$ auf $\lim_{t\to\infty} e(t)$?