Fachgebiet Regelungstechnik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Audimax, Humboldt-Hörsaal
Mittwoch, den 10. 03. 2021
Beginn: 13.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	14	17	16	10	17	74
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

14 Punkte

Gegeben seien Übertragungsfunktion $G(s)$ einer Regelstrecke und Übertragungsfunktion $K(s)$ eines Reglers mit

$$G(s) = \frac{s+\tau}{s^2+2s+1} \quad \text{und} \quad K(s) = 1 + \frac{k}{s+\tau}, \qquad \tau, k \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie eine steuerbare Realisierung der Regelstrecke G in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\,. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie eine steuerbare Realisierung des Reglers K in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\,\bar{x}(t) + \bar{B}\,\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= \bar{C}\,\bar{x}(t) + \bar{D}\,\bar{u}(t)\,. \end{aligned}$$

c) Geben Sie die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises an, d.h. setzen Sie $\bar{u} = y$ und $u = \bar{y}$.

d) Geben Sie die Bedingungen an τ und k so an, dass das geregelte System asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 2

17 Punkte

Berechnen Sie die reellen Lösungen $y = y(t)$ mit $t \geq t_0$ zu folgenden Anfangswertproblemen:

a) $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} x(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad x(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 1$

b) $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -6 \\ -\sin(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t), \quad x(t_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0$

c) Zeigen Sie, dass die Lösung $y(t)$ zu dem folgenden Anfangswertproblem reell ist:
$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 3j & 0 \\ 0 & -3j \end{pmatrix} x(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0, \quad j^2 = -1$

Aufgabe 3

16 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 50 & 51 \end{pmatrix}.$$

a) Ist das System steuerbar?

b) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung $u(t) = k^\top x(t) + f\,r$ so, dass alle Eigenwerte bei -5 (mehrfach) zu liegen kommen. Bestimmen Sie dabei auch das Vorfilter f.

Das obige System weise nun eine konstante Modellunsicherheit $p \in \mathbb{R}$ auf, womit sich A ändert zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 + p \end{pmatrix},$$

und B sowie C gleich bleiben.

c) Bestimmen Sie den Bereich von p, für den der geschlossene Regelkreis (mit Regelgesetz aus b)) asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Wenn Sie unter b) kein Ergebnis berechnet haben, verwenden Sie für $k^\top = \begin{pmatrix} -34 & -43 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

10 Punkte

Gegeben ist das folgende System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad D = 4,$$

wobei $x(t) \in \mathbb{R}^2$ der Zustand, $u(t) \in \mathbb{R}$ die Stellgröße und $y(t) \in \mathbb{R}$ der Messausgang sind.

a) Bestimmen Sie die Beobachtbarkeitsmatrix und zeigen Sie, dass das System beobachtbar ist.

b) Berechnen Sie zur Transformation des Systems auf Beobachtungsnormalform die Transformationsmatrix P_o sowie deren Inverse P_o^{-1}, die den Zustand gemäß $x_o = P_o^{-1}x$ transformiert.

c) Geben Sie die Systemmatrizen A_o, B_o, C_o, D_o des Systems in Beobachtungsnormalform an.

Aufgabe 5

17 Punkte

Gegeben ist das SISO-System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t).\end{aligned}$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Relativgrad zwischen Ausgang y und Eingang u.

b) Welchen der drei folgenden Trajektorien kann für $t \geq 0$ bei einer Stellbegrenzung der Sollstellgröße von $|u^*(t)| \leq 10$ gefolgt werden?

$$\begin{aligned}
&(1) \quad y_1^*(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0,1] \\ 2t-1, & t > 1 \end{cases} \\
&(2) \quad y_2^*(t) = t^2 \\
&(3) \quad y_3^*(t) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}t), & t \in [0,1] \\ t, & t > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

c) Berechenen Sie ein Regelgesetz mit I-Anteil so, dass der Ausgang der Trajektorie $y^*(t) = \sin(\omega t) + 1$ folgt. Die Eigenwerte der Folgefehlerdynamik sollen dabei zu $\lambda_i = -1$ (mehrfach) gewählt werden.

d) Für welche Werte von β ist die Nulldynamik asymptotisch stabil?

e) Zur Regelung der gleichen Trajektorie wird nun das folgende Regelgesetz verwendet:

$$u_2(t) = \ddot{y}^*(t) + 3\dot{y}^*(t) + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) - y^*(t) \\ x_2(t) - \dot{y}^*(t) \\ x_3(t) - \ddot{y}^*(t) \end{pmatrix}$$

Wie unterscheidet sich die Folgefehlerdynamik im Vergleich zu der beim Regelgesetz von c) ?