Fachgebiet Regelungstechnik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Audimax

Donnerstag, den 10. 03. 2022

Beginn: 08.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Studiengang: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	13	22	14	12		61
erreichte Punkte						
					Note	

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Aufgabe 1

13 Punkte

Gegeben sei das zeitdiskrete, zeitinvariante System mit Dynamikmatrix in Jordan-Normalform:

$$\Sigma_\mathrm{d} : \begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) \end{cases}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die homogene Lösung $y_\mathrm{hom}(k)$ des freien Systems ($u \equiv 0$).

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(k)$ für konstante Eingänge $u(k) = \bar{u}$ und geben Sie den stationären Endwert in Abhängigkeit von $\bar{u}$ an, falls er existiert.

Hinweis: Sie können für den stationären Endwert nachstehende Tabelle zu Hilfe nehmen.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 4$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4$

Betrachten Sie nun das homogene, zeitvariante System:

$$\Sigma'_\mathrm{d} : \begin{cases} x(k+1) = A(k)\,x(k) \\ y(k) = C\,x(k) \end{cases}, \quad x(k_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_0 = 3, \quad A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 2^{-k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\Phi'_\mathrm{d}(k, k_0)$ und damit dann die Lösung $y = y(k)$.

d) Bestimmen Sie den Zustand $x(0)$, d.h. den Zustand zum Zeitschritt $k = 0$.

Aufgabe 2

22 Punkte

Für ein zeitkontinuierliches System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

mit Zustandsvektor $x(t) \in \mathbb{R}^2$, Eingangs- und Ausgangssignal $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$ und Ausgangsmatrix $C = (1 \;\; 0)$ wurde ein Zustandsregler der Form

$$u(t) = k^\top x(t)$$

mit $k^\top = (-1 \quad -2)$ so entworfen, dass die Eigenwerte der Matrix $A + Bk^\top$ alle bei -4 liegen.

Das Ein-/Ausgangsverhalten des *ungeregelten* Systems lässt sich durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-2}{s^2 + 3s + 8}$$

beschreiben. Die unbekannte Systemmatrix und der unbekannte Eingangsvektor sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das resultierende Zählerpolynom der Übertragungsfunktion des Systems durch $Z(s) = b_1 s - b_1 a_{22} + b_2 a_{12}$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass das resultierende Nennerpolynom der Übertragungsfunktion des Systems durch $N(s) = s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von $A + Bk^\top$ durch $\lambda^2 + (b_1 + 2b_2 - a_{11} - a_{22})\lambda + b_1(2a_{21} - a_{22}) + b_2(a_{12} - 2a_{11}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ gegeben ist.

d) Berechnen Sie die Matrizen A und B mittels Koeffizientenvergleich.

e) Das Regelgesetz soll um ein Vorfilter f so erweitert werden, dass konstante Referenzwerte r stationär genau eingeregelt werden können, d.h. $u(t) = k^\top x(t) + fr$. Sei $k^\top$ wie oben angegeben. Bestimmen Sie das Vorfilter f.

Hinweis: Ohne Ergebnis aus Teilaufgabe d) verwenden Sie $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

14 Punkte

Gegeben ist das zeitdiskrete System mit einem konstanten Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$x(i+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} x(i) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(i)$$
$$y(i) = \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \end{pmatrix} x(i) + 2\,u(i).$$

Für dieses System soll nun eine zeitdiskrete Zustandsrückführung der Form

$$u(i) = k^\top x(i) + f\,r$$

mit $r \in \mathbb{R}$ genutzt werden.

a) Bestimmen Sie die Verstärkung $k \in \mathbb{R}^3$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises alle bei null liegen (Deadbeat-Verhalten).

b) Berechnen Sie den stationären Zustand $x^* := \lim_{i\to\infty} x(i)$ in Abhängigkeit von f und $r \equiv$ konst.

c) In wie vielen Abtastschritten wird für $r = 0$ von einem beliebigen Anfangszustand aus der Ursprung $x = 0$ im geschlossenen Regelkreis erreicht?

d) Wie viele Abtastschritte sind für den speziellen Anfangszustand $x(0) = f r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$ nötig, damit der stationäre Zustand x^* aus b) erreicht wird?

e) Berechnen Sie das Vorfilter f für eine stationäre Verstärkung von eins, das heißt $\frac{y^*}{r} = 1$ für $y^* := \lim_{i\to\infty} y(i)$. Für welche Werte von p existiert das Vorfilter?

Aufgabe 4

12 Punkte

Gegeben sei folgende Systemdarstellung eines Reglers

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A\,z(t) + B\,e(t), \qquad z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^3\\ u(t) &= C\,z(t) + D\,e(t),\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = -1$$

mit dem Reglerzustand z, Reglereingang e und dem Reglerausgang u.

a) Prüfen Sie die Stabilität für das freie System $\dot{z}(t) = A\,z(t)$.

b) Ist das Paar (C, A) vollständig beobachtbar?

In der Implementierung des Reglers wird die Stellgrößenbegrenzung

$$u_{\text{sat}}(t) = \text{sat}(u(t)) = \begin{cases} u(t), & \text{für} \quad |u(t)| \leq m \\ -m, & \text{für} \quad u(t) < -m \\ m, & \text{für} \quad u(t) > m \end{cases}$$

mit der positiven Konstanten m verwendet. Um das Ansteigen der Reglerzustände für $|u(t)| > m$ zu verhindern, soll eine sogenannte Anti-Windup Kompensation mit Rückführung $l \in \mathbb{R}^3$ gemäß folgender Abbildung entworfen werden.

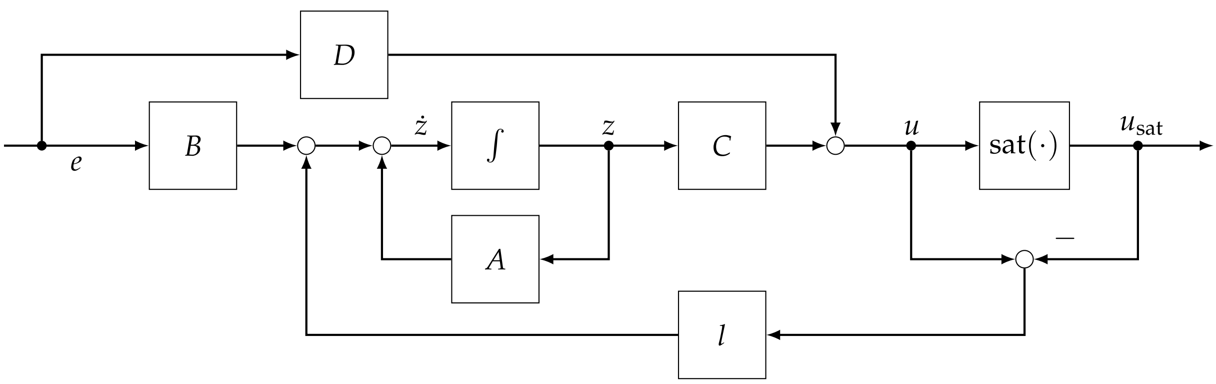

Abbildung 1: Blockschaltbild des Reglers mit Stellbegrenzung und Anti-Windup Kompensator l

c) Geben Sie die rechte Seite von $\dot{z}(t)$ und die zugehörige Dynamikmatrix $\hat{A}$ für den Fall $u(t) > m$ an. Es reicht dies symbolisch zu tun.

d) Bestimmen Sie l so, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix $\hat{A}$ für $u(t) > m$ bei -2 liegen.

Hinweis: Ohne Ergebnis aus Teilaufgabe c) verwenden Sie $\hat{A} = A - lC$.