Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Audimax

Montag, den 19. 09. 2022

Beginn: 17.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	18	14	14	11		57
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

18 Punkte

Ein RCL-Netzwerk mit einer Tunneldiode lässt sich mit den folgenden Gleichungen beschreiben:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left(-h(x_1) + x_2\right)$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}\left(-x_1 - R\,x_2 + u\right),$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$. Dabei ist $R = 4$, $L = 0{,}5$ und $C = 2$. Die Kennlinie der Tunneldiode ist gegeben durch (vgl. Abbildung 1)

$$h(x_1) = \begin{cases} -x_1^2 + 2x_1, & x_1 \leq 1{,}5 \\ \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{5}{2}x_1 + \frac{27}{8}, & x_1 > 1{,}5\,. \end{cases}$$

a) Betrachten Sie den Betriebspunkt $(x_1^*, x_2^*) = (0{,}5,\ 0{,}75)$. Wegen eines falsch angeschlossenen Messgeräts sehen Sie am Ausgang $y = 2x_2^2 + \pi u$. Bestimmen Sie die Matrizen A, B, C und D des linearisierten Systems mit Zustand $\Delta x = x - x^*$.

b) Ist das linearisierte System am Betriebspunkt $(x_1^*, x_2^*) = (0{,}5,\ 0{,}75)$ stabil bzw. asymptotisch stabil?

c) Zeichnen Sie in Abbildung 1 für $u^* = 3{,}5$ alle möglichen stationären Betriebspunkte x_1^* ein.

d) Bestimmen Sie die Anzahl der stationären Betriebspunkte in Abhängigkeit von u^*.
Hinweis: Nutzen Sie die Diodenkennlinie in Abbildung 1.

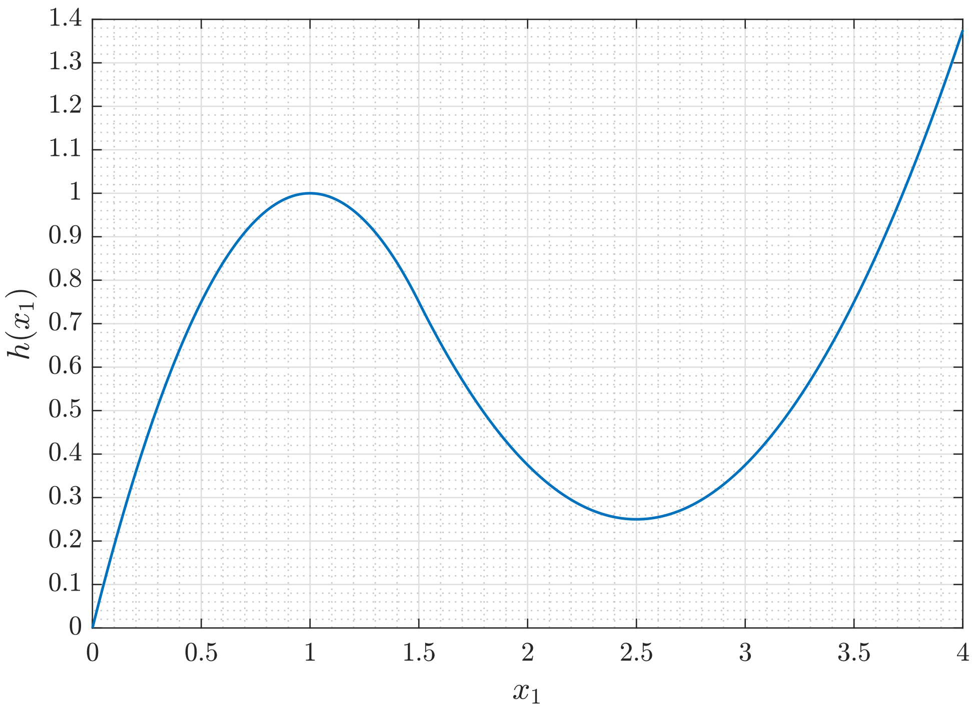

Abbildung 1: Strom-Spannungs-Kennlinie $h(x_1)$ einer Tunneldiode.

Aufgabe 2

14 Punkte

Gegeben ist das SISO-System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

a) Ist das freie System ($u \equiv 0$) asymptotisch stabil?

b) Ist das System steuerbar?

c) Berechnen Sie den Regler $u(t) = k^\top x(t)$, der dem System die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3 + 2j$ und $\lambda_3 = -3 - 2j$ vorgibt. Warum können Sie diese Eigenwerte für das System vorgeben?

d) Ist das System beobachtbar?

e) Berechnen Sie die Beobachterverstärkung L eines Beobachters $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + LC(\hat{x} - x)$, die der Beobachterfehlerdynamik die Eigenwerte $\hat{\lambda}_1 = -1$, $\hat{\lambda}_2 = -2 + j$ und $\hat{\lambda}_3 = -2 - j$ vorgibt. Warum können Sie diese Eigenwerte für die Beobachterfehlerdynamik vorgeben?

f) Anstelle von $u(t) = k^\top x(t)$ wird $u(t) = k^\top \hat{x}(t)$ als Zustandsrückführung mit oben betrachteten Beobachter verwendet. Erweitern Sie den Zustand um den Fehler $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ und stellen Sie die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises für den erweiterten Zustand auf.

g) Geben Sie die Eigenwerte des erweiterten Systems an und beurteilen Sie die Stabilität. Treffen Sie eine Aussage über die Konvergenz des erweiterten Zustands im Gesamtsystem.

Aufgabe 3 **14 Punkte**

Das zeitkontinuierliche LTI-System

$$\Sigma: \; \dot{x} = A\,x + B\,u \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -\ln 2 & 1 \\ 0 & -\ln 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soll auf zweierlei Arten mit konstanter Abstastperiode $T > 0$ diskretisiert werden.

a) Bestimmen Sie die homogene Lösung von Σ für einen beliebigen Anfangswert $x(0) = x_0$.

b) Ermitteln Sie damit das exakte Abtastsystem, d.h. A_d und B_d bzgl. $x(k+1) = A_\mathrm{d} x(k) + B_\mathrm{d} u(k)$.

Hinweis: Nutzen Sie, dass A invertierbar ist. Wenn Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, verwenden Sie $A_\mathrm{d} = \begin{pmatrix} e^{-T} & T\,e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix}$.

c) Berechnen Sie ein Abtastsystem über die Approximation $\dot{x} \approx \frac{x(k+1)-x(k)}{T}$ (Euler-Diskretisierung), d.h. $\hat{A}_\mathrm{d}$ und $\hat{B}_\mathrm{d}$ bzgl. $\hat{x}(k+1) = \hat{A}_\mathrm{d}\hat{x}(k) + \hat{B}_\mathrm{d} u(k)$.

Betrachten Sie nun das freie System mit $u \equiv 0$. Weiterhin sei $\hat{x}(0) = x_0$.

d) Berechnen Sie in Abhängigkeit der Abstastperiode T für beliebige x_0 eine Schranke für die Maximumnorm $e_\infty(k) = \max(|e_1(k)|, |e_2(k)|)$ bzgl. der Abweichung $e(k) = \hat{x}(k) - x(k)$.

Aufgabe 4 **11 Punkte**

Ein System sei gegeben als

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Zunächst soll das System zur einfacheren Regelung in zwei Teilsysteme zerlegt werden.

a) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung mit neuem Eingang $v(t)$ so, dass das System in zwei SISO Teilsysteme zerlegt wird. D.h. bestimmen Sie K in $u(t) = Kx(t) + v(t)$ so, dass das resultierende System die Form

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_1\, v_1(t) \\ b_2\, v_2(t) \end{pmatrix}$$

hat.

b) Betrachten Sie nun die beiden SISO Teilsysteme einzeln. Sind sie voneinander entkoppelt? Sind die Paare $(A_1,\ b_1)$ und $(A_2,\ b_2)$ steuerbar?

c) Entwerfen Sie für das zerlegte System eine Zustandsrückführung $v(t) = \tilde{K}x(t)$ so, dass die Eigenwerte der jeweiligen Dynamikmatrizen alle bei -1 liegen.

Betrachten Sie wieder das originale System aus der Aufgabenstellung.

d) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung für $u_1(t) = k_1^\top x(t)$ so, dass das geregelte System

$$\dot{x}(t) = (A + e_2 k_1^\top)x(t) + e_5\, u_2(t)$$

in Abhängigkeit von u_2 in Regelungsnormalform vorliegt. Dabei sei e_i der i-te Einheitsvektor.

e) Entwerfen Sie nun eine Zustandsrückführung für $u_2(t) = k_2^\top x(t)$ für das geregelte System aus Aufgabenteil d), um alle Eigenwerte der Dynamikmatrix des Systems nach -1 zu legen.

Hinweis: $(s+1)^5 = s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1$